2014 年度

線型代数学演習 A

No. 9 例題

2014 年 6 月 23 日実施

$\boxed{1}$ 以下の複素行列について, (有限回の) 基本変形を施すことにより, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形せよ. その際, 基本変形の具体的な操作も記述せよ. なお, 最終形において, 下の 2 つの O, あるいは右の 2 つの O は現れないことがある.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(略解) 基本変形の具体的な操作はまとめて書くことにする.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \overset{\text{(ii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{(iii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{(iv)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{(v)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

各基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

(i) 第 2, 3 行にそれぞれ第 1 行の 2 倍, -2 倍を加える.

(ii) 第 2 行を $\frac{1}{5}$ 倍する.

(iii) 第 3 行に第 2 行の 3 倍を加える.

(iv) 第 2, 3, 4 列にそれぞれ第 1 列の -2 倍, -3 倍, -5 倍を加える.

(v) 第 3, 4 列にそれぞれ第 2 列の -2 倍, -1 倍を加える.

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(ii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(iii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{(iv)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{(v)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

各基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

(i) 第 2, 4 行にいずれも第 1 行の -1 倍を加える.

(ii) 第 1, 2 行にそれぞれ第 3 行の -1 倍, 1 倍を加える.

(iii) 第 1, 2, 3 行にそれぞれ第 4 行の 1 倍, -2 倍, -1 倍を加える.

(iv) 第 2 行と第 3 行を入れ替える.

(v) 第 3 行と第 4 行を入れ替える.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5 \in \mathbb{C}^3$ を以下で与えられるものとする.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

そして, これらの数ベクトルを並べて得られる行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5)$ とする.

(1) A に行基本変形を施すことにより, 階段行列 B に変形せよ. その際, その変形の具体的な操作も記述せよ.

(2) $W = \langle\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5\}\rangle \subset \mathbb{C}^3$ とし, $r = \dim W$ とする. このとき, $\{\boldsymbol{a}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{k_r}\}$ が W の基底となる $\boldsymbol{a}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{k_r}$ $(k_1 < \cdots < k_r)$ を $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_5$ から一組選べ.

(略解) (1) 行基本変形の具体的な操作はまとめて書くことにする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{(i)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{(ii)}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = B.$$

各行基本変形の具体的操作は以下の通りである.

(i) 第 2 行に第 1 行を加える.

(ii) 第 3 行に第 2 行の -1 倍を加える.

(2) (1) で得られた B を $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5)$ と表すとする. すると, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4$ の第 3, 2, 1 成分を順に考えることにより, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4$ は一次独立である. ところで, 行基本変形は有限個の基本行列の積である正則行列 P を左から掛けることにより実現される. この P を用いると, $\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{a}_j \, (1 \leq j \leq 5)$ である. ここで, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \alpha_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^3$ が成り立つとする. すると, $\boldsymbol{0} = P\boldsymbol{0} = \alpha_1 P\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 P\boldsymbol{a}_2 + \alpha_4 P\boldsymbol{a}_4 = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \alpha_4\boldsymbol{b}_4$ となるが, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4$ は一次独立であるから, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$. ゆえに, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ は一次独立であり, $\dim W \geq 3$. ところが, $\dim \mathbb{C}^3 = 3$ であるから, $\dim W = 3$ であり, $W = \mathbb{C}^3$. 従って, $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\} \subset W$ は W の基底である.