2014年度

線型代数学演習A

No. 8 例題

2014年6月16日実施

$\boxed{1}$ 以下の $\mathbb{C}^3$ の部分集合 $S \subset \mathbb{C}^3$ が部分ベクトル空間であるか, 根拠を添えて述べよ.

(1) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,;\, \begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$.

(2) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,;\, x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \right\}$.

(略解) (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ とおく. そして, $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3)$ とする. すると, f は線型写像であり, $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \,;\, f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, 即ち, $S \subset \mathbb{C}^3$ は線型写像 f の核 $\mathrm{Ker} f$ である. ゆえに, S は $\mathbb{C}^3$ の部分ベクトル空間である. 実際, $f(\boldsymbol{0}) = A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker} f = S$ であり, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とすると, $S = \mathrm{Ker} f$ より $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0}$ となり,

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0},$$
$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}.$$

ゆえに, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \alpha\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker} f = S$ であることがわかる.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする. すると, $1^2 - 1^2 + 0^2 = 1 - 1 + 0 = 0$, $0^2 - 1^2 + 1^2 = 0 - 1 + 1 = 0$ であるから, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S$ である. ここで, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるが, $1^2 - 2^2 + 1^2 = 1 - 4 + 1 = -2 \neq 0$ であるから, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \notin S$. 従って, S は $\mathbb{C}^3$ の部分ベクトル空間ではない.

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられる4次複素数ベクトルとする.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

そして, $U_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $U_2 = \langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ を, それぞれ $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ で生成された $\mathbb{C}^4$ の部分ベクトル空間とする.

(1) U_1 と U_2 の共通部分 $U_1 \cap U_2$ の基底を 1 組与えよ.

(2) (1) で与えられる $U_1 \cap U_2$ の基底に適当なベクトルを付け加えて, U_1 と U_2 の和空間 $U_1 + U_2$ の基底を 1 組構成せよ.

(略解) (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2$ とすると, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ が存在して, $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 = \alpha_3 \boldsymbol{v}_3 + \alpha_4 \boldsymbol{v}_4$ と表される. すると, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ -2\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -2\alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix}$ が成り立つから, $2\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 = -\alpha_4$ となる. そこで, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (t, 2t, t, -2t)\,(t \in \mathbb{C})$ とすると, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}$ であり, $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v}_1 + 2t\boldsymbol{v}_2 \in U_1$, かつ $\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v}_3 - 2t\boldsymbol{v}_4 \in U_2$ であるから, $\boldsymbol{x} \in U_1 \cap U_2$ である. 従って, $U_1 \cap U_2$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ をとることができる.

(2) $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立であるから $\dim U_1 = 2$ であり, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ も一次独立であるから $\dim U_2 = 2$ である. いま, $\boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると, (1) より $\{\boldsymbol{v}_0\}$ は $U_1 \cap U_2$ の基底である. 特に, $\boldsymbol{v}_0 \in U_1$ であり, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$ は一次独立であるから, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1\} \subset U_1$ は U_1 の基底である. 同様にして, $\boldsymbol{v}_0 \in U_2$ であり, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立であるから, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3\} \subset U_2$ は U_2 の基底である. ところで, $\boldsymbol{x} \in U_1 + U_2$ について, $\boldsymbol{x}_1 \in U_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in U_2$ が存在して, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ と表される. $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1\}$, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3\}$ はそれぞれ U_1, U_2 の基底であるから, $\beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C}$ が存在して, $\boldsymbol{x}_1 = \beta\boldsymbol{v}_0 + \beta'\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{x}_2 = \gamma\boldsymbol{v}_0 + \gamma'\boldsymbol{v}_3$ と表される. よって, $\boldsymbol{x} = (\beta+\gamma)\boldsymbol{v}_0 + \beta'\boldsymbol{v}_1 + \gamma'\boldsymbol{v}_3$ となり, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ は $U_1 + U_2$ を生成する. 次に, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha\boldsymbol{v}_0 + \beta\boldsymbol{v}_1 + \gamma\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると, $\alpha\boldsymbol{v}_0 + \beta\boldsymbol{v}_1 = -\gamma\boldsymbol{v}_3 \in U_1 \cap U_2$ である. ここで, $\{\boldsymbol{v}_0\}$ は $U_1 \cap U_2$ の基底であるから, $\delta \in \mathbb{C}$ が存在して, $\alpha\boldsymbol{v}_0 + \beta\boldsymbol{v}_1 = \delta\boldsymbol{v}_0 = \delta\boldsymbol{v}_0 + 0\boldsymbol{v}_1$ である. そして, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1\}$ は U_1 の基底であるから, $\alpha = \delta$, $\beta = 0$ が成り立つ. よって, $\alpha\boldsymbol{v}_0 + 0\boldsymbol{v}_3 = \alpha\boldsymbol{v}_0 = -\gamma\boldsymbol{v}_3 = 0\boldsymbol{v}_0 - \gamma\boldsymbol{v}_3$ であり, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_3\}$ は U_2 の基底であるから, $\alpha = \gamma = 0$. 従って, $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$ は一次独立である. 以上により, $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3\}$ は $U_1 + U_2$ の基底である.