2014年度

線型代数学演習A

No. 6 例題

2014年6月2日実施

$\boxed{1}$ V を高々3次複素係数一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $T : V \longrightarrow V$ を次で与えられる線型写像とする.

$$Tf(x) = 2f(x+1) - f(x).$$

この T について, V の以下の基底 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ に関する行列表示を求めよ.

(1) $f_0(x) = 1$ (定数項のみの多項式), $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$.

(2) $f_0(x) = 1, f_1(x) = x$, $f_2(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + x)$, $f_3(x) = \dfrac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x)$.

(略解) (1) $Tf_0(x), Tf_1(x), Tf_2(x), Tf_3(x)$ をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned}
Tf_0(x) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_1(x) &= 2(x+1) - x = x + 2 = 2 \cdot f_0(x) + 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_2(x) &= 2(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 2 \\
&= 2 \cdot f_0(x) + 4 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_3(x) &= 2(x+1)^3 - x^3 = x^3 + 6x^2 + 6x + 2 \\
&= 2 \cdot f_0(x) + 6 \cdot f_1(x) + 6 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x).
\end{aligned}$$

ゆえに, $(Tf_0, Tf_1, Tf_2, Tf_3) = (f_0, f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $Tf_0(x), Tf_1(x), Tf_2(x), Tf_3(x)$ を $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ の一次結合で表すと,

$$\begin{aligned}
Tf_0(x) &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_1(x) &= 2(x+1) - x = x + 2 = 2 \cdot f_0(x) + 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_2(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2}((x+1)^2 + (x+1)) - \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2 \\
&= 2 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x), \\
Tf_3(x) &= 2 \cdot \frac{1}{6}((x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 2(x+1)) - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + 2 \\
&= 2 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x).
\end{aligned}$$

よって, $(Tf_0, Tf_1, Tf_2, Tf_3) = (f_0, f_1, f_2, f_3)\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&2&2\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ $V = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}$ とし, 線型写像 $f : V \longrightarrow V$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in V = \mathbb{C}^2)$ で与えられるものとする.

(1) $V = \mathbb{C}^2$ の基底 $\left\{\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

(2) $V = \mathbb{C}^2$ の基底 $\left\{\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

(略解) (1) は $f(\boldsymbol{u}_1)$, $f(\boldsymbol{u}_2)$, (2) は $f(\boldsymbol{v}_1)$, $f(\boldsymbol{v}_2)$ を直接計算することにより解くこともできるが, ここでは, 基底の変換行列を用いて解く. まず, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を $V = \mathbb{C}^2$ の基本ベクトルとする. すると,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \quad f(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix} = -4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2.$$

ゆえに, $(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)A$ である.

(1) $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ であり, また, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{v}_1$ であるから, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ となる. よって, $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{u}_2) = -f(\boldsymbol{e}_1)$ より,

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{u}_1), f(\boldsymbol{u}_2)) &= (f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2))\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)A\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}5&-7\\3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}-2&-5\\-1&-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(2) $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$ であり, また, $\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ であるから, $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$. よって, $f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2)$, $f(\boldsymbol{v}_2) = 2f(\boldsymbol{e}_1) + f(\boldsymbol{e}_2)$ より,

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)) &= (f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2))\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)A\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\\ &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}1&-2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$