2014 年度

線型代数学演習A

No. 5 例題

2014 年 5 月 26 日実施

$\boxed{1}$ 以下の写像 $f : A \longrightarrow B$ が単射であるかどうか調べよ. また, 全射であるかどうか調べよ.

(1) $A = B = [-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}\,;\, -2 \leq x \leq 2\}$, $\quad f(x) = x^2 - 2$ $(x \in A)$.

(2) $A = B = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^{-x}$ $(x \in A)$.

(略解) (1) $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$, $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ であるから, $-2 \neq 2$, かつ $f(-2) = f(2)$ となり, f は単射ではない. また, $f(0) = 0^2 - 2 = -2$ であり, $f'(x) = 2x$ であるから, $x \in (-2, 0)$ のとき $f'(x) < 0$, $x \in (0, 2)$ のとき $f'(x) > 0$ である. そして, f は $[-2, 2]$ で連続であるから, 特に $[-2, 0]$, $[0, 2]$ で連続である. よって, 平均値の定理より, f は $[-2, 0]$ において単調減少, 即ち, $x, x' \in [-2, 0]$, かつ $x \leq x'$ ならば $f(x) \geq f(x')$ となり, $[0, 2]$ において単調増加, 即ち, $x, x' \in [0, 2]$, かつ $x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ となる. ゆえに, $x \in [-2, 2]$ のとき, $x \in [-2, 0]$ であれば, $f(x) \in [f(0), f(-2)] = [-2, 2]$ であり, $x \in [0, 2]$ のときは, $f(x) \in [f(0), f(2)] = [-2, 2]$ となり, いずれの場合も $f(x) \in [-2, 2] = B$ である. そして, f は $[0, 2]$ で連続であるから, 中間値の定理より, $y \in [-2, 2] = [f(0), f(2)]$ なる任意の実数 y について, $f(x) = y$ となる $x \in [0, 2]$ が存在する. よって, f は全射である.

(2) f は $\mathbb{R}$ 上微分可能であり, $f'(x) = -e^{-x}$ である. よって, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について, $f'(x) < 0$ となる. ゆえに, 平均値の定理より, f は狭義単調減少, 即ち, $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x < x'$ ならば, $f(x) = e^{-x} > e^{-x'} = f(x')$ となる. ここで, x と x' の立場を入れ替えると, $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x > x'$ であれば, $f(x) < f(x')$ が成り立つ. $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x \neq x'$ であるとき, $x < x'$, あるいは $x > x'$ が成り立つから, いずれの場合であっても $f(x) \neq f(x')$ が成り立つ. 従って, f は単射である. また, 任意の実数 x について, $f(x) = e^{-x} > 0$ であるから, 例えば $y = 0 \in B = \mathbb{R}$ とすると, $f(x) = y$ となる $x \in A = \mathbb{R}$ は存在しない. 従って, f は全射ではない.

$\boxed{2}$ 以下の写像 $f : V \longrightarrow W$ が $\mathbb{R}$ 上の線型写像であるかどうか, 根拠を添えて答えよ.

(1) $V = W = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ として, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ について, 直線 $l : x_1 + x_2 = 0$ に関して対称な点を $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ としたとき, $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{y}$ を対応させる写像 $f : V \longrightarrow W$.

(2) $V = W = \mathbb{R}$ として, $x \in V = \mathbb{R}$ に対して $|x| \in W = \mathbb{R}$ を対応させる写像 $f : V \longrightarrow W$.

(略解) (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ を任意にとる. すると, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ は l に関して $\boldsymbol{x}$ と対称な点であるから, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の中点 $\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1}{2} \\ \frac{x_2+y_2}{2} \end{pmatrix}$ は l 上に存在する. 特に, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であれば, それは $\boldsymbol{m}$ とも一致し, l 上に存在する. また, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が一致しなければ, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分は l と直交する. 即ち, $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$ は ($\boldsymbol{0}$ となる場合も含めて) l の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍となる. ゆえに, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 + y_1}{2} + \dfrac{x_2 + y_2}{2} = 0, \\ \dfrac{y_1 - x_1}{1} = \dfrac{y_2 - x_2}{1}. \end{cases}$$

よって, $y_1 + y_2 = -x_1 - x_2$, $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$ となり, $y_1 = -x_2$, $y_2 = -x_1$. 即ち,

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

ここで, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表される. よって, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V = \mathbb{R}^2$, および $\alpha \in \mathbb{R}$ について,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') &= A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}'), \\ f(\alpha\boldsymbol{x}) &= A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(A\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

従って, f は線型写像である.

(2) $x = 1$, $x' = -1$ とするとき, $f(x) = f(1) = |1| = 1$, $f(x') = f(-1) = |-1| = 1$ であるが, $x + x' = 1 + (-1) = 0$ であり,

$$f(x + x') = f(0) = |0| = 0 \neq 1 + 1 = f(x) + f(x').$$

従って, f は線型写像ではない.