# 2014年度

# 線型代数学演習A

## No. 4 例題

2014年5月19日実施

○ 記号: $\mathbb{C}$ は複素数体を表す. また, $n$ を正整数とするとき, $n$ 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n,\mathbb{C})$ と表すことにする.

$\boxed{1}$ 行列 $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C})$ を, 以下の行列 $A, B, C, D$ の一次結合で表せ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = CBC$.

(略解) (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, かつ $X = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ であるとする. このとき, 両辺の各成分を比較することにより, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3, \\ -\gamma + \delta = 5, \\ \gamma + \delta = -1, \\ \alpha - \beta = 1. \end{cases}$$

第1, 4式より, $\alpha = 2$, $\beta = 1$. 第2, 3式より, $\gamma = -3$, $\delta = 2$. 従って, $X = 2A + B - 3C + 2D$.

(2) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. いま, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, かつ $X = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ であるとする. すると, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta \qquad + \delta = 3, \\ \qquad \beta + \gamma \qquad = 5, \\ \qquad\qquad \gamma + \delta = -1, \\ -\alpha + \beta \qquad + \delta = 1. \end{cases}$$

第1, 4式より, $\alpha = 1$, $\beta + \delta = 2$. これと上の第2, 3式より $\beta + \gamma + \delta = 3$. ゆえに, $\beta = 4$, $\gamma = 1$, $\delta = -2$. 従って, $X = A + 4B + C - 2D$.

$\boxed{2}$ $A \in M(2,\mathbb{C})$ が与えられたとき, $A$ と交換可能な 2 次複素正方行列全体のなす集合を $M_A$ と表すとする.

$$M_A = \{X \in M(2,\mathbb{C})\,;\, AX = XA\}.$$

$A$ が以下のものであるとき, $M_A$ を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(略解) $M_A$ の元を $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ と表すことにする.

(1) $AX = \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ -2x_{21} & -2x_{22} \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} 3x_{11} & -2x_{12} \\ 3x_{21} & -2x_{22} \end{pmatrix}$ であるから,

$$\begin{cases} 3x_{11} = \phantom{-}3x_{11}, \\ 3x_{12} = -2x_{12}, \\ -2x_{21} = \phantom{-}3x_{21}, \\ -2x_{22} = -2x_{22}. \end{cases}$$

よって, $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$ であり, $x_{11}$, $x_{22}$ としてどのような複素数をとっても, 第 1, 4 式は成り立つ. 従って, $M_A = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} ;\, t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

(2) $AX = \begin{pmatrix} 4x_{11} - x_{21} & 4x_{12} - x_{22} \\ 4x_{21} & 4x_{22} \end{pmatrix}$, $XA = \begin{pmatrix} 4x_{11} & -x_{11} + 4x_{12} \\ 4x_{21} & -x_{21} + 4x_{22} \end{pmatrix}$ であることより,

$$\begin{cases} 4x_{11} - x_{21} = 4x_{11}, \\ 4x_{12} - x_{22} = -x_{11} + 4x_{12}, \\ 4x_{21} \phantom{- x_{22}} = 4x_{21}, \\ 4x_{22} \phantom{- x_{22}} = -x_{21} + 4x_{22}. \end{cases}$$

第 1 式より $x_{21} = 0$. 第 2 式より $x_{11} = x_{22}$. このとき, $x_{12}$ としてどのような複素数をとっても, 上のすべての式が成り立つ. 従って, $M_A = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix} ;\, s, t \in \mathbb{C} \right\}$.

(3) $A = 5E_2$ であり, 任意の 2 次複素正方行列 $X$ について, $E_2X = XE_2 = X$ が成り立つ. よって,

$$AX = (5E_2)X = 5(E_2X) = 5(XE_2) = X(5E_2) = XA.$$

従って, $M_A = M(2,\mathbb{C})$.