2014年度

線型代数学演習A

No. 3 例題

2014年5月12日実施

$\boxed{1}$ $V = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,;\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ で高々3次の複素係数一変数多項式全体のなす集合を表し, 通常の和とスカラー倍により, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える. このとき, 次の多項式たちが V において一次独立か, あるいは一次従属か, 理由をつけて答えよ.

(1) $f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $f_2(x) = x^3 + x^2 + x$, $f_3(x) = x^3 + x^2$.

(2) $f_1(x) = x^3 + x^2 - x - 1$, $f_2(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $f_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, $f_4(x) = x^3 - 1$.

(略解) (1) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) = 0$ (零多項式) とする. すると, 多項式として $(\alpha + \beta + \gamma)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0$ となり, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha + \beta \qquad = 0, \\ \alpha \qquad\qquad = 0. \end{cases}$$

第3式を第2式に代入すると, $\beta = 0$. これらを第1式に代入すると, $\gamma = 0$. 従って, $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は一次独立である.

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0$ であるとする. すると, $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)x^3 + (\alpha - \beta - \gamma)x^2 + (-\alpha - \beta + \gamma)x + (-\alpha + \beta - \gamma - \delta) = 0$ となる. ゆえに, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \\ \alpha - \beta - \gamma \qquad = 0, \\ -\alpha - \beta + \gamma \qquad = 0, \\ -\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0. \end{cases}$$

第1, 4式より $\beta = 0$. これを第2式に代入して, $\alpha - \gamma = 0$ となり, $\gamma = \alpha$. これらを第1式に代入すると, $2\alpha + \delta = 0$. よって, $\delta = -2\alpha$ となる. そこで, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 0, 1, -2$ とおくと, 確かに $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \gamma f_3(x) + \delta f_4(x) = 0$ となることが分かる. 従って, $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ は一次従属である.

$\boxed{2}$ $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};$ 連続 $\}$ で $\mathbb{R}$ 上の実数値連続函数全体のなす集合を表し, 函数としての通常の和と実数倍により, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える. このとき, 次の函数たちは, V において $\mathbb{R}$ 上一次独立であることを示せ.

(1) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$.

(2) $f(x) = 1$ (定数函数), $g(x) = 2^x$, $h(x) = 3^x$.

(略解) (1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, かつ $\alpha f + \beta g = 0$ (函数として 0) であるとする. このとき, $x = 0$, $\dfrac{\pi}{2}$ とすると,

$$0 = \alpha \cos 0 + \beta \sin 0 = \alpha, \quad 0 = \alpha \cos \frac{\pi}{2} + \beta \sin \frac{\pi}{2} = \beta.$$

従って, f, g は一次独立である.

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, かつ $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$ とする. ここで, $x = 0, 1, 2$ とすると, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \ \ \beta + \ \ \gamma = 0, \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0, \\ \alpha + 4\beta + 9\gamma = 0. \end{cases}$$

第 1, 2 式より $\beta + 2\gamma = 0$. また, 第 2, 3 式より $2\beta + 6\gamma = 0$. よって, $\beta + 3\gamma = 0$ となる. これらにより, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$ が得られる. 従って, f, g, h は一次独立である.