2014年度

$\boxed{\boxed{\text{線型代数学演習A}}}$

No. 2 例題

2014年4月28日実施

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{C}^3$ を以下のものとする.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 上の3個のベクトルから任意に2個のベクトルを取り出したとき, そのベクトルの組は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} \subset \mathbb{C}^3$ は $\mathbb{C}^3$ を生成しないことを示せ.

(略解) (1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ について, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから, 第2, 3成分より $\alpha = \beta = 0$. よって, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は一次独立である. $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ については, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \gamma\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} 2\alpha+\gamma \\ \gamma \\ \alpha+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, 第2成分より $\gamma = 0$. これを第3成分に代入すると, $\alpha = 0$. ゆえに, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ は一次独立である. また, $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ について, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} \beta+\gamma \\ -\beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから, 第3成分より $\gamma = 0$. これを第1成分に代入すると, $\beta = 0$. 従って, $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は一次独立である.

(2) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ をとる. そして, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{y}$ が成り立つとする. すると, $\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta+\gamma \\ -\beta+\gamma \\ \alpha+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, 第2, 3成分より $-\alpha = \beta = \gamma$ となる. これを第1成分に代入すると, $2\alpha - \alpha - \alpha = 0 = 1$ となり矛盾が生じる. よって, このような複素数 α, β, γ は存在しない. これは, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ が $\mathbb{C}^3$ を生成しないことを意味する.

$\boxed{2}$ t を複素数とし, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられるベクトルとする.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ t \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となる t を求めよ.

(略解) (1) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ とする. すると, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる. 第 1, 4 成分より $\alpha = \gamma = 0$. これを第 2 成分に代入すると, $\beta = 0$. 従って, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は一次独立である.

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$, かつ $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 + \delta\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする. ここで, $\delta = 0$ とすると, $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$ となるが, (1) より $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は一次独立であるから, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. これは $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ に反する. よって, $\delta \neq 0$. ゆえに, $\boldsymbol{x}_4 = -\dfrac{\alpha}{\delta}\boldsymbol{x}_1 - \dfrac{\beta}{\delta}\boldsymbol{x}_2 - \dfrac{\gamma}{\delta}\boldsymbol{x}_3$ となる. 即ち, $\boldsymbol{x}_4$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の一次結合で表される. 逆に, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, かつ $\boldsymbol{x}_4 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3$ が成り立つとすると, $\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3 + (-1) \cdot \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$ かつ $(\alpha, \beta, \gamma, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$ であるから, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ は一次従属である. ゆえに, $\boldsymbol{x}_4 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2 + \gamma\boldsymbol{x}_3$ なる $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ が存在する複素数 t を求めればよい. このとき, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+\beta \\ \beta+\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ となるから, 第 1 成分より $\alpha = 2$. これを第 2 成分に代入して, $\beta = 2$. さらに, これを第 3 成分に代入すると, $\gamma = 3$. よって, 第 4 成分を比較することにより, $t = \gamma = 3$.