2014年度

$\boxed{\text{線型代数学演習A}}$

No. 1 例題

2014年4月21日実施

$\boxed{1}$ (1) $z^6 = -1$ なる複素数 z で, 偏角が最小の正実数となるものを求めよ.

(2) $z^6 = -64$ をみたす複素数をすべて求めよ.

(略解) (1) $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ である. また, $|-1| = 1$ より $1 = |z^6| = |z|^6$ であるから, $|z| = 1$ となる. ゆえに, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta \leq 2\pi)$ としてよい. すると, $z^6 = \cos 6\theta + i\sin 6\theta$ であるから, 整数 n が存在して, $6\theta = (2n+1)\pi$ となる. ここで, $0 < 6\theta \leq 12\pi$ であるから, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ である. θ が最小であるとき, 6θ も最小になるから, それは $n = 0$ のときであり, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. 従って, $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.
(2) (1) と同様に解くこともできるが, (1) と de Moivre の公式を利用して, 次のように解くこともできる. $64 = 2^6$ である. ここで, z_0 として次の複素数をとる.

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{3}+i}{2} = \sqrt{3}+i.$$

すると, (1) より $z_0^6 = 2^6\cdot(-1) = -64$ となり, $\left(\dfrac{z}{z_0}\right)^6 = \dfrac{z^6}{z_0^6} = 1$ である. よって, $\dfrac{z}{z_0} = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると, $\theta = \dfrac{2\pi k}{6} = \dfrac{\pi k}{3}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ となる. 従って,

$$\begin{aligned} z = z_0\cdot\frac{z}{z_0} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\frac{\pi(2k+1)}{6} + i\sin\frac{\pi(2k+1)}{6}\right). \end{aligned}$$

ただし, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ であり, $\dfrac{\pi(2k+1)}{6}$ はそれぞれ $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{11\pi}{6}$ となる. 従って, $z = \sqrt{3}+i,\ 2i,\ -\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}-i,\ -2i,\ \sqrt{3}-i$.

$\boxed{2}$ (1) nを正整数, $a_0, a_1, \ldots, a_n$を実数で, $a_n \neq 0$なるものとする. いま, $f(z) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j z^j$とし, αを複素数とする. このとき, $f(\alpha) = 0$ならば, $f(\overline{\alpha}) = 0$となることを示せ.

(2) 実数を係数にもち, $f(1+i) = f(2-i) = 0$をみたす多項式$f(z)$のうち, 次数が最小であり, かつ最高次の係数が1であるものを求めよ.

(略解) (1) $f(\alpha) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j \alpha^j = 0$である. また, $a_0, a_1, \ldots, a_n$は実数であるから, $\overline{a}_0 = a_0$, $\overline{a}_1 = a_1$, $\ldots$, $\overline{a}_n = a_n$となる. よって,

$$\begin{aligned} f(\overline{\alpha}) &= a_n(\overline{\alpha})^n + \cdots + a_1(\overline{\alpha}) + a_0 = \overline{a}_n(\overline{\alpha})^n + \cdots + \overline{a}_1(\overline{\alpha}) + \overline{a}_0 \\ &= \overline{a_n\alpha^n} + \cdots + \overline{a_1\alpha} + \overline{a}_0 = \overline{a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

(2) $f(z)$の係数はすべて実数で, $f(1+i) = f(2-i) = 0$であるから, (1)より$f(1-i) = f(2+i) = 0$となる. よって, 因数定理より(複素数を係数にもつ多項式として) $f(z)$は$z-1-i$, $z-1+i$, $z-2+i$, $z-2-i$で割り切れる. よって, $f(z)$は少なくとも4次以上である. そこで, これらの1次式の積を$g(z)$とすると, $g(z)$は4次式で, 4次の係数は1であり,

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-1-i)(z-1+i)(z-2+i)(z-2-i) \\ &= (z^2-2z+2)(z^2-4z+5) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10. \end{aligned}$$

この多項式の係数はすべて実数である. 従って, $f(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$が求める多項式である.