

線型代数学演習 A

No.12 要約

2013 年 7 月 1 日実施

1 行列式.

n を正整数とし, $A = (a_{jk})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次正方行列とする. このとき, 次で表される値を A の行列式と呼ぶ.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

ここで, S_n は n 次対称群を表す. 行列 A が n 次正方行列であることから, $\det A$ を n 次の行列式ということがある. 行列式は以下のように表されることもある.

$$|A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n),$$

ただし, $1 \leq k \leq n$ なる k について $\mathbf{a}_k$ は A の第 k 列のなす n 次元数ベクトルとする.

行列式を多項式で具体的に表すと, $n!$ 項の多項式になる. よって, n が大きいとき行列式を定義通り計算するのは必ずしも効率がよいとはいえない. しかし, 0 でない元が現れる成分の配置によっては, 行列式の定義より容易に計算できる場合がある. n 次正方行列 $A = (a_{jk})$ について, $j > k$ ならば $a_{jk} = 0$ であるとき, A は上半三角行列, $j < k$ ならば $a_{jk} = 0$ であるとき, A は下半三角行列であるといい, これらを総称して三角行列と呼ぶ. 三角行列について, 定義より次のことが得られる.

- $A = (a_{jk})$ を n 次三角行列とすると, $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ が成り立つ.

行列式の定義に現れる置換 σ は n 次対称群 S_n の元すべてにわたるが, n 次の置換の逆置換全体 $\{\sigma^{-1}; \sigma \in S_n\}$ も S_n と一致する. これを用いると次のことが得られる.

- n 次正方行列 A について, $\det {}^t A = \det A$.

n 次正方行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ に対して行列式 $\det A$ を対応させる操作は $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の n 個の直積集合から $\mathbb{K}$ への写像とみなすことができる.

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) &\longmapsto \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

行列式をこのような写像と考えたとき、以下の性質をみたすことがわかる。

- (1) $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j + \mathbf{a}'_j, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}'_j, \dots, \mathbf{a}_n)$.
- (2) $\det(\mathbf{a}_1, \dots, c\mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) = c \det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n), \quad c \in \mathbb{K}$.
- (3) $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_k \ (j < k)$ のとき, $\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$.
- (3)(および(1)) より次のこともわかる.
- (3)' 任意の $\sigma \in S_n$ について, $\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$.

特に、二つの列を入れ替えると、行列式は -1 倍される。(1), (2) を行列式の列についての多重線型性, (3) を列についての交代性と呼ぶ。 A の転置行列 tA の行列式 $\det {}^tA$ を考えることにより、行列式の行についての多重線型性、行についての交代性も成り立つ。逆に、多重線型性および交代性から、以下のことが得られる。

定理 1 n を正整数とし、体 $\mathbb{K}$ 上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の n 個の直積集合から $\mathbb{K}$ への写像 $F : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ が多重線型性と交代性をもつとする。このとき、任意の n 個の n 次元数ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して、以下のことが成り立つ。

$$F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n),$$

ただし、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ は基本ベクトルである。

A を n 次正方行列とし、定理 1 の F として $F(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) = \det(A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$ をとることにより、次のことが得られる。

- n 次正方行列 A, B について, $\det AB = \det A \det B$.

2 行列式と基本変形.

$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ を n 次正方行列とする。すると、行列式の列についての多重線型性、交代性により、列基本変形と行列式の関係がわかる。

- (1) A の第 k 列に第 j 列の c 倍 ($c \in \mathbb{K}$) を加える $\implies$ 行列式は変わらない。
- (2) A の第 j 列と第 k 列を入れ替える $\implies$ 行列式は -1 倍される。
- (3) A の第 j 列を c 倍 ($c \in \mathbb{K}$) する $\implies$ 行列式は c 倍される。

これらは、各基本行列の行列式が $\det P(j, k, c) = 1, \det Q(j, k) = -1, \det R(j, c) = c$ となることから、 $\det AP(j, k; c), \det AQ(j, k), \det AR(j, c)$ を計算することによっても得られる。

行基本変形についても全く同様に行列式との関係がわかる。

- (1) A の第 j 行に第 k 行の c 倍 ($c \in \mathbb{K}$) を加える $\implies$ 行列式は変わらない。
- (2) A の第 j 行と第 k 行を入れ替える $\implies$ 行列式は -1 倍される。
- (3) A の第 j 行を c 倍 ($c \in \mathbb{K}$) する $\implies$ 行列式は c 倍される。

一般の n 次正方行列の行列式は、基本変形を繰り返すことにより、計算しやすい行列(三角行列など)に変形することにより求めやすくなることもある。