

線型代数学演習 A

No.10 要約

2013年6月17日実施

1 階段行列.

m, n を正整数とすると、体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 階段行列とは、以下のものである.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k_1} & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2k_2} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rk_r} & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

ここで、 $0 \leq r \leq m$, $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$, $a_{jk_j} \neq 0$ ($1 \leq j \leq r$), $a_{jk} = 0$ (「 $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k \leq k_j - 1$ 」, または「 $r+1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$ 」) である. この行列にさらに行基本変形を施すことにより、以下の形、即ち、 $a_{jk_j} = 1$ ($1 \leq j \leq r$), $a_{lk_j} = 0$ ($2 \leq j \leq r$, $1 \leq l \leq j-1$) なる形の階段行列に変形できる. このような階段行列を簡約行列と呼ぶことがある.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

特に、 $m = n$ かつ階数が n であるとき、簡約行列は n 次単位行列 E_n である.

2 転置行列.

m, n を正整数とし、 $A = (a_{jk})$ を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列とする. このとき、 (j, k) 成分を a_{kj} とする (n, m) 行列を A の転置行列と呼び、 tA と表す.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ に対して, } {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

転置行列には次の性質がある.

- (1) ${}^t({}^tA) = A$.
- (2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (3) ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

一般に ${}^t(AB) \neq {}^tA{}^tB$ である. A が正則行列であれば tA も正則であり, その逆行列は $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ である. よって, これらを区別せず ${}^tA^{-1}$ と書く.

3 正則行列.

n を正整数とし, A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ零行列でない n 次正方行列とする. A は行基本変形により簡約行列に変形できる. その簡約行列が E_n ならば $\text{rank } A = n$ である. 逆に, $\text{rank } A = n$ のときは行基本変形により E_n に変形することができる. 二つの n 次正則行列の積はまた n 次正則行列だから, 行基本変形により E_n に変形できるならば, ある n 次正方行列 B が存在して, $BA = E_n$ が成り立つ.

一般に, k, l, m, n を正整数とし, A, B, C をそれぞれ体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列, (l, m) 行列, (n, k) 行列とすると, 次のことが成り立つ.

- (i) $\text{rank } BAC \leq \text{rank } A$.
 - (ii) 特に, $l = m, n = k$ かつ B, C がともに正則ならば, $\text{rank } BAC = \text{rank } A$.
- これより, n 次正方行列 A, B について, $\text{rank } BA \leq \text{rank } A$ より, $BA = E_n$ ならば $\text{rank } A = n$ が成り立つ. 以上により, n 次正方行列 A について, 以下の性質はすべて同値になる.

- (1) $\text{rank } A = n$.
- (2) 行に関する基本変形により A は段数が n の階段行列に変形できる.
- (3) ある n 次正方行列 B が存在して $BA = E_n$ が成り立つ.

一般に, 階数 r の階段行列の第 1 行, $\dots$, 第 r 行たちは一次独立である. よって, 一般の行列 A について, $\text{rank } A = \text{rank } {}^tA$ である. また, 基本行列 $P(j, k; c), Q(j, k), R(j, c)$ について, それらの転置行列は ${}^tP(j, k; c) = P(k, j; c), {}^tQ(j, k) = Q(k, j), {}^tR(j, c) = R(j, c)$ となり, 基本行列である. そして, 上の同値条件に現れる行列の転置行列を考えることにより, n 次正方行列 A について, 上の条件に加えて以下の条件もすべて同値になる.

- (4) $\text{rank } {}^tA = n$.
- (5) ある n 次正方行列 C が存在して $AC = E_n$ が成り立つ.

n 次正方行列 A が正則であることと $\text{rank } A = n$ は同値であるから, 次のことが成り立つことがわかる.

定理 1 n を正整数とし, A を体 $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次正方行列とする. このとき, 以下の条件は同値である.

- (1) ある n 次正方行列 B が存在して, $BA = E_n$ が成り立つ.
 - (2) ある n 次正方行列 C が存在して, $AC = E_n$ が成り立つ.
 - (3) ある n 次正方行列 X が存在して, $XA = AX = E_n$ が成り立つ.
- さらに, これらの B, C, X はすべて一致し, A は正則行列である.