

線型代数学演習 A

No.8 要約

2013年6月3日実施

1 部分ベクトル空間.

V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. V の空でない部分集合 U が **部分ベクトル空間**, あるいは単に **部分空間** であるとは, 次の二つの条件をみたすことである.

(1) $x, y \in U$ ならば $x + y \in U$.

(2) $x \in U, \alpha \in \mathbb{K}$ ならば $\alpha x \in U$.

即ち, 加法とスカラー倍の演算に閉じた部分集合 を部分ベクトル空間と呼ぶ. V における和とスカラー倍をもって U における和とスカラー倍とすれば, U もベクトル空間になる.

任意のベクトル空間 V について, V 自身と $\{0\} \subset V$ は V の部分ベクトル空間である. これらを V の **自明な** 部分ベクトル空間と呼ぶ.

部分ベクトル空間の次元を考える上で次のことは重要である.

補題 1 V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし, S をその任意の相異なる有限個の元からなる列が一次独立となる部分集合とする. このとき, S を含む V の部分集合 $S' \supset S$ で, V の基底となるものが存在する.

これにより, U を V の部分ベクトル空間とするとき $\dim U \leq \dim V$ であり, さらに V が有限次元かつ $\dim U = \dim V$ ならば $U = V$ である. なお, V の部分ベクトル空間 U について, $\dim U = m \leq n = \dim V$ とするとき, 一般には V の 与えられた基底 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ から m 個のベクトルを選んで U の基底とすることが できない.

U_1, U_2 をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とする. すると, 共通部分 $U_1 \cap U_2$ も部分ベクトル空間である. しかし, 一般に和集合 $U_1 \cup U_2$ は部分ベクトル空間ではない.

ベクトル空間 V の部分集合 S に対して, 次の部分集合 $\langle S \rangle \subset V$ を考える.

$$\langle S \rangle = \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_l x_l \in V; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{K}, x_1, x_2, \dots, x_l \in S \} \subset V.$$

即ち, $\langle S \rangle$ とは, S の有限個の元の一次結合で表される V の元全体のなす V の部分集合である. ただし, S が空集合のときは $\langle S \rangle = \{0\}$ とする. すると, $\langle S \rangle$ は V の部分ベクトル空間になることが容易に確かめられる. この $\langle S \rangle$ を S によって **生成された** 部分ベクトル空間, あるいは S によって **張られる** 部分ベクトル空間と呼ぶ. 作り方から, $\langle S \rangle$ は S を含む V の 最小の 部分ベクトル空間である.

U_1, U_2 をベクトル空間 V の部分ベクトル空間とし、次の部分集合を考える。

$$U_1 + U_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}.$$

これは、 U_1, U_2 を含む V の最小の部分ベクトル空間である。この $U_1 + U_2$ を U_1, U_2 の**和空間**あるいは**和**と呼ぶ。 U_1, U_2 およびその和空間の次元には、次のような関係がある。

$$\bullet \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 U_1, U_2 について、 $V = U_1 + U_2, U_1 \cap U_2 = \{0\}$ であるとき、 V は U_1, U_2 の**直和**であるといい、 $V = U_1 \oplus U_2$ と表す。特に、 V が有限次元ベクトル空間であるとき、 V が U_1, U_2 の直和であることは、 $V = U_1 + U_2$ かつ $\dim V = \dim U_1 + \dim U_2$ であることと同値である。 $V = U_1 \oplus U_2$ であるとき、 V の任意の元 x は U_1 の元 x_1 および U_2 の元 x_2 により $x = x_1 + x_2$ と 一意的に 表される。逆に、 V の任意の元 x が U_1 の元と U_2 の元の和として 一意的に 表されるとき、 $V = U_1 \oplus U_2$ となる。

2 線型写像と部分ベクトル空間.

U, V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし、 $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とする。 U の部分ベクトル空間 U' について、 U' の f による**像** $f(U') = \{v \in V; \exists u \in U', v = f(u)\} \subset V$ は V の部分ベクトル空間である。特に、 $U' = U$ のとき U の f による像 $f(U) = \text{Im} f$ は V の部分ベクトル空間になる。この $\text{Im} f$ を f の**像**と呼ぶ。また、 V の部分ベクトル空間 V' について、次で与えられる U の部分集合 $f^{-1}(V') \subset U$ を V' の f による**逆像**と呼ぶ。

$$f^{-1}(V') = \{u \in U; f(u) \in V'\} \subset U.$$

$f^{-1}(V')$ は U の部分ベクトル空間である。特に、 $V' = \{0\}$ のとき $\{0\}$ の f による逆像 $f^{-1}(\{0\}) = \{u \in U; f(u) = 0\} \subset U$ は U の部分ベクトル空間である。この $f^{-1}(\{0\})$ を f の**核**と呼び、 $\text{Ker} f$ と表す。 f の核には、次の性質がある。

補題 2 線型写像 $f : U \longrightarrow V$ が単射であるためには、 $\text{Ker} f = \{0\}$ であることが必要十分である。

よって、線型写像 f が単射であるかどうか調べるには、 f の核 $\text{Ker} f$ が 0 以外の元をもつかどうか調べればよい。

U, V をベクトル空間、 $f : U \longrightarrow V$ を線型写像とすると、次の式が成り立つ。

$$\bullet \dim U = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) \quad (\text{次元公式}).$$

線型写像 $f : U \longrightarrow V$ について、 $\text{Im} f$ の次元 $\dim(\text{Im} f)$ を f の**階数**と呼び、 $\text{rank} f$ と表す。このとき、次のことが成り立つ。

$$(1) f \text{ が単射} \iff \text{rank} f = \dim U.$$

$$(2) f \text{ が全射} \iff \text{rank} f = \dim V.$$