

線型代数学演習 A

No.5 要約

2013年5月13日実施

1 集合.

ここでは、線型代数学を学ぶときに当面必要な内容のみを簡単に述べる.

集合とは、数学的な意味で属するかどうかははっきりする「『もの』の集まり」のこととし、属する「もの」を**元**と呼ぶ. 高等学校では元は要素と呼ばれることが多い. 2つの集合 A, B について,

$$A \subset B \stackrel{\text{def}}{\iff} x \in A \text{ ならば } x \in B.$$

このとき、 A は B に含まれる、あるいは B は A を含むといい、 A を B の**部分集合**と呼ぶ. 元を1つももたない集合を**空集合**と呼び、 $\emptyset$ で表す. 定義より、空集合 $\emptyset$ はすべての集合の部分集合である.

集合 A に対して、 A の元の個数を A の**濃度**と呼ぶ. ここでは A の濃度を $\sharp A$ で表すことにする. $\sharp A$ が有限のとき A を**有限集合**、無限のとき A を**無限集合**と呼ぶ.

X を集合とし、 A, B を X の部分集合とする. このとき、 A と B の**和集合** $A \cup B$ 、**共通部分** $A \cap B$ および (X における) A の**補集合** A^c を以下のように定義する.

$$A \cup B := \{x \in X; x \in A \text{ または } x \in B\},$$

$$A \cap B := \{x \in X; x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$A^c := \{x \in X; x \notin A\}.$$

さらに、 A と B の**差集合** $A \setminus B$ を $A \setminus B := A \cap B^c = \{x \in A; x \notin B\}$ と定義する. $A \cup B$, $A \cap B$, A^c , $A \setminus B$ はいずれも X の部分集合である. このような新しい部分集合を作る操作と濃度には、次の関係がある.

- (i) $A \cap B = \emptyset$ ならば $\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B$.
- (ii) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, $(A \cap B) \cap (A \setminus B) = \emptyset$ であるから $\sharp A = \sharp(A \cap B) + \sharp(A \setminus B)$.
- (iii) 一般に $\sharp(A \cup B) + \sharp(A \cap B) = \sharp A + \sharp B$.

2 写像.

集合 A, B について、 A の すべての 元 x に対して B の元 $f(x)$ を定める「対応」を A 上の B への**写像**、または A から B への写像と呼び、 $f: A \rightarrow B$ と表す. $x \in A$ に $f(x)$ が対応することを $x \mapsto f(x)$ と表す. (矢印が “ $\rightarrow$ ” ではなく “ $\mapsto$ ” であることに注意せよ.)

写像 $f : A \longrightarrow B$ について, $f(A) := \{f(x); x \in A\} \subset B$ を f の**像**と呼び, $\text{Im}f$ と表す. $\text{Ran}f, \text{ran}f$ などと表されることもある.

写像 $f : A \longrightarrow B$ が**単射**であるとは, A の元 x, y について, $f(x) = f(y)$ ならば $x = y$ となることである. 対偶を考えると, 単射であることは, $x \neq y$ ならば $f(x) \neq f(y)$ であることと同値である. また, f が**全射**であるとは, $\text{Im}f = B$, 即ち, 任意の $y \in B$ に対して $f(x) = y$ なる $x \in A$ が存在することである. f が単射かつ全射であるとき**全単射**であるという. f が単射のとき $\sharp A \leq \sharp B$, 全射のとき $\sharp A \geq \sharp B$, 全単射のとき $\sharp A = \sharp B$ が成り立つ.

集合 A に対して, $f(x) = x (\forall x \in A)$ なる写像 $f : A \longrightarrow A$ を A 上の**恒等写像**と呼び, $1_A, \text{Id}_A, \text{id}_A$ などと表す. 恒等写像は明らかに全単射である.

A, B, C を集合とし, $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C$ をそれぞれ写像とする. このとき, 次のような写像 $g \circ f : A \longrightarrow C$ が得られる.

$$g \circ f : A \longrightarrow C, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

この写像 $g \circ f$ を f と g の**合成写像**と呼び, 2つの写像から合成写像を作る操作を**写像の合成**と呼ぶ. 写像の合成には以下の性質がある.

- (i) $f : A \longrightarrow B, g : B \longrightarrow C, h : C \longrightarrow D$ に対して $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
- (ii) $f : A \longrightarrow B$ に対して $f \circ 1_A = f, 1_B \circ f = f$.

写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して, 次の性質をみたす写像 $g : B \longrightarrow A$ が存在するとする.

$$g \circ f = 1_A, \quad f \circ g = 1_B.$$

このとき, g を f の**逆写像**と呼び, f^{-1} と表す. 次の事実は重要である.

$$f : A \longrightarrow B \text{ が逆写像をもつ} \iff f : A \longrightarrow B \text{ が全単射.}$$

3 線型写像.

$\mathbb{K}$ を体とし, V, W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. このとき, 写像 $f : V \longrightarrow W$ が ($\mathbb{K}$ 上の) 線型写像であるとは, 次の性質が成り立つことである.

- (1) 任意の $x, y \in V$ について, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- (2) 任意の $x \in V$ および $\alpha \in \mathbb{K}$ について, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

$\mathbb{K}$ 上の任意のベクトル空間 V について, V 上の恒等写像は線型写像である.

V, W, U を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間, $f : V \longrightarrow W, g : W \longrightarrow U$ を線型写像とするとき, 合成写像 $g \circ f : V \longrightarrow U$ も線型写像である. また, f が全単射であるとき, f の逆写像 $f^{-1} : W \longrightarrow V$ も線型写像である.

一般に, m, n を正整数, $A = (a_{jk})$ を $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ (m, n) 行列とすると, 写像 $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ を $f_A(x) = Ax$ ($x \in \mathbb{K}^n$) とすると, f_A は線型写像である.