

線型代数学演習 A

No.3 要約

2013年5月2日実施

1 ベクトル空間.

$\mathbb{K}$ を体とする. 集合 V が $\mathbb{K}$ 上の**ベクトル空間**であるとは, V の元 x, y および体 $\mathbb{K}$ の元 α (これを**スカラー**と呼ぶ) に対して和 $x + y \in V$ およびスカラー倍 $\alpha x \in V$ が定義されて, 以下の性質をみたすことである.

- (1) $x + y = y + x$.
- (2) $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (3) ある元 0 が存在して, 任意の x について $x + 0 = 0 + x = x$.
- (4) 任意の x に対してある元 $-x$ が存在して $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- (5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
- (6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
- (7) $\alpha(\beta v) = \beta(\alpha v) = (\alpha\beta)v$.
- (8) $1x = x$.

この (1)~(8) を**ベクトル空間の公理**と呼び, V の元を**ベクトル**と呼ぶ. また, (3) の 0 を**零ベクトル**, (4) の $-x$ を x の**逆ベクトル**と呼ぶ.

V の元 x が**有限個**の V の元 $x_1, x_2, \dots, x_r$ とスカラー $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ を用いて $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r$ と表されるとき, x は $x_1, x_2, \dots, x_r$ の**一次結合**で表わされるという. V の有限個のベクトル $x_1, x_2, \dots, x_r$ が**一次独立**であるとは, 次が成り立つことである.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_r x_r = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0.$$

有限個のベクトル $x_1, x_2, \dots, x_r$ が一次独立でないとき, **一次従属**であるという. V の部分集合 S が次をみたすとき**基底**であるという.

- (1) V のすべての元 x が S の**有限個**のベクトルの一次結合で表わされる.
- (2) S の任意の**有限個**の相異なるベクトルは一次独立である.

(1) をみたすとき S は V を**生成する**という. S が V の基底であるとき, S の濃度 (元の個数) $\#S$ を V の**次元**と呼び, $\dim V$ と表す. $\dim V$ が有限, 無限のとき, それぞれ V を有限次元ベクトル空間, 無限次元ベクトル空間と呼ぶ. V に対して基底 S の取り方は一通りではないが, その濃度 $\#S$ は S の取り方によらない.

有限次元ベクトル空間としては、 n を正整数としたときの n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を例に挙げることができる。無限次元ベクトル空間の例として次のものがある。

例 V として、 X を変数とし体 $\mathbb{K}$ の元を係数にもつ一変数多項式全体のなす集合 $V = \mathbb{K}[X]$ を考え、和とスカラー倍は多項式としての和とスカラー倍で与えるとする。

$$\mathbb{K}[X] = \{\alpha_n X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0; \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \in \mathbb{K}, n \text{ は非負整数}\}.$$

このとき、 $\mathbb{K}[X]$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる。基底としては、係数 1 の単項式全体 $S = \{X^n; n \text{ は非負整数}\}$ をとることができる。よって、 $\mathbb{K}[X]$ は無限次元である。

2 線型写像 (一次写像).

V, W を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。 V から W への写像 $f : V \longrightarrow W$ が**線型写像**, あるいは**一次写像**であるとは、次の性質が成り立つことである。

(1) 任意の V の元 x, y について $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(2) 任意の V の元 x およびスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ について $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ 。

(1) は f が「和を保存する」、(2) は f が「スカラー倍を保存する」と言うことがある。これらを組み合わせると、 f は「一次結合を保存する」ことがわかる。

線型写像 $f : V \longrightarrow W$ が全単射 (上への 1 対 1 写像) であれば、逆写像 $f^{-1} : W \longrightarrow V$ も線型写像になることが容易に確かめられる。従って、 V と W における「線型」な性質は f (および f^{-1}) によって完全に対応する。全単射な線型写像を**線型同型写像**と呼ぶ。

r を正整数とし、 V を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする。いま、 V の元 $x_1, x_2, \dots, x_r$ を一つ固定する。ここで、写像 $f : \mathbb{K}^r \longrightarrow V$ を次で与える。

$$f \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_r x_r.$$

すると、 f は線型写像であり、次が成り立つ。

(1) f が単射 $\iff x_1, x_2, \dots, x_r$ が一次独立。

(2) f が全射 $\iff \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ が V を生成する。

(3) f が全単射 $\iff \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ が V の基底。

よって、 n を正整数、 V を $\dim V = n$ なるベクトル空間とし、 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を V の基底とすると、この f により V と $\mathbb{K}^n$ を同一視することができる。しかし、同一視をするときに用いられる写像 f は V の基底の取り方に依存して定まるので、 V と $\mathbb{K}^n$ の同一視の仕方是一通りではない。一般に、ベクトル空間 V には数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の標準基底のような「標準的」と呼べる基底は存在しない。むしろ、取り扱う問題により基底を取り換えることによって、数学的理解を深めることができる。