

線型代数学演習 A

No.2 要約

2013 年 4 月 22 日実施

1 数ベクトル空間.

$\mathbb{K}$ を (可換) 体とする. 当面は $\mathbb{K}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$, 実数体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数体 $\mathbb{C}$ と考えて構わない. n を正整数とすると, $\mathbb{K}^n$ で $\mathbb{K}$ の元を成分にもつ n 次元列ベクトル (縦ベクトル) 全体のなす集合を表す.

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_j \in \mathbb{K}, 1 \leq \forall j \leq n \right\}.$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して各 $x_j (1 \leq j \leq n)$ を $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分と呼び, これらを総称して成分と呼ぶ. (以下では, 体は常に (乗法に関して) 可換である とする.)

$\mathbb{K}^n$ における加法およびスカラー倍を各成分ごとの加法とスカラー倍により定義する.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

このように加法およびスカラー倍が定義された $\mathbb{K}^n$ を (n 次元) 数ベクトル空間と呼ぶ. 特に, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のときは, $\mathbb{Q}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ をそれぞれ (n 次元) 有理数ベクトル空間, 実数ベクトル空間, 複素数ベクトル空間と呼ぶ.

数ベクトル空間は以下の性質 (1) ~ (8) をもつ.

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}).$

(3) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ とおくと, $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して $-\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ とおくと, $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$

$$(5) \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}.$$

$$(6) \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

$$(7) \quad \alpha(\beta\mathbf{x}) = \beta(\alpha\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}.$$

$$(8) \quad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

(3) の $\mathbf{0}$ を零ベクトル, (4) の $-\mathbf{x}$ を $\mathbf{x}$ の逆ベクトルと呼ぶ.

r を正整数とし, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ とするとき, $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_r\mathbf{x}_r$ と表される $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ を $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の一次結合と呼び, 各 α_j を係数と呼ぶ. $\mathbb{K}^n$ の元 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ が一次独立であるとは, 次のことが成り立つことである.

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0.$$

これは, $\mathbf{0}$ が $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の一次結合で表わされるのは自明なとき, 即ち, すべての係数が 0 となるときであることを意味する. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ が一次独立でないとき一次従属であるという. 一次独立性に関して次の補題が成り立つ.

補題 1 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^n$ とする. もし, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_{r+1} \in \mathbb{K}^n$ が $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の一次結合で表わされるならば, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_r, \mathbf{y}_{r+1}$ は一次従属である.

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^n$ について. 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ が $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ の一次結合で表わされるとき, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ は $\mathbb{K}^n$ を生成するという. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^n$ が一次独立かつ $\mathbb{K}^n$ を生成するとき, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} \subset \mathbb{K}^n$ を $\mathbb{K}^n$ の基底という.

$1 \leq j \leq n$ なる j について, 第 j 成分が 1 , 他の成分が 0 である n 次元列ベクトル $\mathbf{e}_j \in \mathbb{K}^n$ を基本ベクトルという.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ は $\mathbb{K}^n$ の基底であり, 次のことが成り立つ.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}.$$

このことと補題 1 より以下のことが示される.

$$(i) \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{K}^n \text{ が一次独立} \implies r \leq n.$$

$$(ii) \quad \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\} \subset \mathbb{K}^n \text{ が } \mathbb{K}^n \text{ の基底} \implies r = n.$$

なお, この要約では列ベクトルを $\mathbf{x}$ などと書いたが, $\vec{x}$, あるいは単に x と表わされることもある. 文脈などから, 何がベクトルで何がスカラーか見極める必要がある.