

線型代数学演習 A

No.1 要約

2013 年 4 月 15 日実施

1 複素平面 (Gauss 平面).

(一時期高等学校の課程で複素数平面と呼ばれていたことがある.)

虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ で表すことにする. i はしばしば添え字として用いられ, 混乱することもあり得るので, この演習では, 極力 i を添え字として用いないようにする.

2 次元平面に直交座標が入っていると. このとき, 複素数 $\alpha = a + bi$ に対し, 平面上の点 (a, b) を対応させると, この対応は複素数全体のなす集合 $\mathbb{C}$ から 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ への上への 1 対 1 対応である. この対応により $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視するとき, この平面を複素平面, または Gauss 平面と呼ぶ.

2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ を, 単に図形ではなく, しばしば自然な加法とスカラー倍が入ったベクトル空間と考える. すると, 2 つの基本ベクトル $(1, 0)$, $(0, 1)$ にはそれぞれ実数 1 と虚数単位 i が対応する. また, 複素数の加法は, 対応する平面上のベクトルの加法と一致する.

実数全体のなす集合, 純虚数 (0 も含む) 全体のなす部分集合は複素平面の中でそれぞれ原点を通り基本ベクトル $(1, 0)$, $(0, 1)$ を方向ベクトルにもつ直線になる. これらの直線はそれぞれ実軸, 虚軸と呼ばれる. 実軸は実直線 $\mathbb{R}$ に他ならない. 従って, 複素平面は実直線の自然な拡張とみなせる.

複素数 $\alpha = a + bi$ に対して, 複素平面上の対応する点と原点との距離を α の絶対値と呼び, $|\alpha|$ と表す. $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり, 以下のことがわかる.

$$|\alpha| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff \alpha = 0.$$

α を 0 でない複素数とし, 複素平面において原点を端点とし α に対応する点を通る半直線を α の動径と呼ぶ. 1 の動径から反時計回りにみた α の動径となす 一般角 を α の偏角と呼び $\arg \alpha$ と表す. (0 については $\arg 0$ は通常定義しない.) 複素数 α に対して $\arg \alpha$ は一意的には定まらないが, 0 でない複素数 α, β について以下のことが成り立つ.

$$\alpha = \beta \iff |\alpha| = |\beta|, \text{ かつ } \arg \alpha = \arg \beta + 2\pi n, \exists n \in \mathbb{Z}.$$

逆に, 絶対値 $r > 0$, 偏角 $\theta \in \mathbb{R}$ が与えられると, 複素数 $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ が定まる. これを複素数 α の極座標表示と呼ぶことがある.

複素数 $\alpha = a + bi$ に対し、虚部の符号を変えた複素数 $a - bi$ を α の共役複素数 (きょうやくふくそすう, 読み方に気を付けよ) と呼び、 $\bar{\alpha}$ と表す. α と $\bar{\alpha}$ に対応する点は互いに実軸に対して対称な位置にある.

今まで述べた定義より、以下のことが示される.

- (i) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$.
- (ii) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$.
- (iii) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.
- (iv) $\alpha \in \mathbb{R} \iff \bar{\alpha} = \alpha$.
- (v) $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$.
- (vi) $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.
- (vii) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (三角不等式).
- (viii) $\arg \alpha\beta = \arg \alpha + \arg \beta + 2\pi n, \quad \exists n \in \mathbb{Z}$.
- (ix) $r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
 $= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$
- (x) 特に, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ (de Moivre の公式).

複素数 $\alpha, \beta (\alpha, \beta \neq 0)$ の積 $\alpha\beta$ は次のような図形的性質をもつ. $\alpha, \beta, \alpha\beta$ に対応する複素平面上の点をそれぞれ A, B, C とし、原点を O , 1 に対応する点を (この場でのみ) E で表すとする. いま三角形 $\triangle OEA, \triangle OBC$ を考える. (退化している, 即ち, これらの三角形がある直線に含まれることもある.) すると, $\triangle OBC$ は $\triangle OEA$ を原点を中心に $|\beta|$ 倍し, 反時計回りに $\arg \beta$ 回転させたものになる. 特に, $\triangle OEA$ と $\triangle OBC$ は相似であり, 相似比は $1 : |\beta|$ である.

複素平面内の原点を中心とし半径 1 の円周を単位円周と呼ぶ. すると, de Moivre の公式より次のことがわかる.

補題 1 正整数 n について, 単位円周を 1 を n 等分点の一つとしてもつように n 等分し, そのときに現れる n 等分点に対応する複素数たちを考える. すると, それらはすべて 1 の n 乗根である.

1 の n 乗根は高々 n 個しか存在しないから, この補題で得られる複素数で尽くされる.