

線型代数学演習 A

No.14 問題

2013 年 7 月 22 日実施

- 1 次の 4 次複素正方行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) A の行列式 $\det A$ を計算せよ.
 (2) A と 4 次単位行列 E_4 を並べて得られる $(4, 8)$ 複素行列を $\tilde{A} = (A \ E_4)$ と表すとする. この $\tilde{A}$ に行基本変形のみを施して, $\tilde{B} = (E_4 \ B)$ と変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めよ. その際, 行基本変形の過程も記述せよ.

- 2 α を複素数とし, A を以下で与えられる複素行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 & -2 \\ 2 & \alpha + 1 & -4 \\ -1 & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) $\text{rank} A \leq 2$ となる α をすべて求めよ. そして, それらの α について, $\text{rank} A$ をそれぞれ求めよ.
 (2) β を複素数とし, $b = \begin{pmatrix} \beta + 1 \\ \beta - 1 \\ -\beta \end{pmatrix}$ とする. (1) で求めた α のうち, $\text{rank} A = 2$ となるものについて, $(3, 4)$ 複素行列 $B = (A \ b)$ の階数が 2 となる β を求めよ.

- 3 (1) V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $f : V \rightarrow V$ を線型写像とする. そして, $V = \text{Ker} f^2 \oplus \text{Im} f^2$ が成り立つとする. このとき, $\text{rank} f^2 = \text{rank} f$ であるならば, $V = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$ となることを示せ.
 (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 3 次複素正方行列とし, $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ を $f(v) = Av$ ($v \in \mathbb{C}^3$) とする. このとき, 「 $\mathbb{C}^3 = \text{Ker} f^2 \oplus \text{Im} f^2$ であるが, $\mathbb{C}^3$ が $\text{Ker} f$ と $\text{Im} f$ の直和とならない」ということが成り立つために, a, b が満たす必要十分条件を求めよ.