

線型代数学演習 A

## No.13 問題

2013年7月8日実施

- [1]  $\alpha, \beta$  を複素数とする ( $\alpha = 0$ , あるいは  $\beta = 0$  であることもありうる). このとき, 以下の複素 4 次正方行列  $A$  について, 必要に応じて, 基本変形や行あるいは列に沿った行列式の展開を行うことにより, 行列式  $\det A$  を計算せよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- [2]  $a, b$  を複素数とし, 複素行列  $A$  を以下で与えられるものとする.

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a-1 & -3 \\ 2 & a & a-4 \\ -b & -a & a \end{pmatrix}.$$

- (1)  $a = b$  であるとき,  $A$  の階数  $\text{rank} A$  が 2 であるための  $a$  の必要十分条件を求めよ.
- (2)  $a \neq b$  であると仮定する. この仮定の下で,  $A$  の階数  $\text{rank} A$  が 2 であるために  $a, b$  がみたす必要十分条件を求めよ.
- [3]  $n$  を  $n \geq 3$  なる整数,  $c$  を 0 でない複素数とし,  $A = (a_{jk})$  を  $a_{jk} = 1 + c(j^2 + k - 1)$  ( $1 \leq j, k \leq n$ ) なる  $n$  次正方行列とする. そして,  $A$  の余因子行列を  $\tilde{A}$  で表すとする.
- (1)  $A$  の階数  $\text{rank} A$  を求めよ.
- (2)  $n = 3$  のとき,  $\tilde{A}$  を計算せよ. そして,  $\tilde{A}$  の階数  $\text{rank} \tilde{A}$  を求めよ.
- (3)  $n \geq 4$  のとき,  $\tilde{A} = O$  (零行列) であることを示せ.