

線型代数学演習 A

No.12 問題

2013年7月1日実施

○ 記号：正整数 n について, S_n で n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を表すとする.

- [1] 以下の n 次複素正方行列 $A = (a_{jk})$ ($n = 4, 5$) について, 置換を用いた下記の定義に基づいて(行列の基本変形, および行や列に沿った展開公式を用いずに) 行列式 $\det A$ を計算せよ. その際に, 明らかに 0 となること分かる項は記述しなくてもよい.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- [2] 以下の n 次複素正方行列 $A = (a_{jk})$ ($n = 4, 5$) について, 行列に 基本変形を施す ことにより (行や列に沿った展開公式を用いずに) 行列式 $\det A$ を計算せよ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 20 & 35 & 56 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- [3] 複素正方行列 A が 交代行列 であるとは, ${}^tA = -A$ が成り立つことである.

(1) n を正の奇数とすると, 任意の n 次複素交代行列 A の行列式 $\det A$ は 0 であることを示せ.

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \text{ を, } a_{12} \neq 0 \text{ なる 4 次複素交代行列とする. このとき,}$$

$$B = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ -b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & -b_{34} & 0 \end{pmatrix} \text{ となる } B \text{ および 4 次複素行列 } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 1 & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を, $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ を用いて与えよ.

(3) (2) の A について, $\det A$ を $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24}, a_{34}$ の多項式で表せ. その際に, 因数分解された形で表せ.