

線型代数学演習 A

No.11 問題

2013年6月24日実施

○ 記号：正整数 n について, S_n で n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を表すとする.

[1] 以下の置換 σ を, 互換の積として表せ. そして, σ の符号 $\text{sgn } \sigma$ を求めよ.

$$(1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 1 & 9 & 4 & 8 & 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 8 & 7 & 1 & 5 & 9 & 11 & 4 & 3 & 10 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 7 & 11 & 2 & 12 & 6 & 4 & 5 & 10 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 5 & 8 & 11 & 9 & 12 & 4 & 6 & 10 & 13 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

[2] $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 4 & 8 & 11 & 2 & 9 & 1 & 12 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ を 12 次の置換とする.

(1) τ を $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 12 & 2 & 9 & 8 & 1 & 10 & 5 & 11 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ なる 12 次の置換とするとき, $\tau\sigma$, $\sigma\tau$, $\tau\sigma\tau^{-1}$, $\tau^{-1}\sigma\tau$ を求めよ.

(2) $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 9 & 10 & 5 & 12 & 2 & 8 & 3 & 6 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を 12 次の置換とする. このとき, $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$ となる 12 次の置換 τ で, $\tau(1) = 6$, $\tau(2) = 10$, $\tau(6) = 11$, $\tau(12) = 5$ なるものを与えよ.

[3] x_1, x_2, x_3 を変数とする複素係数多項式 f , および 3 次の置換 $\sigma \in S_3$ について, 多項式 σf を $\sigma f(x_1, x_2, x_3) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$ と定義する.

(1) $m > n > 0$ なる整数 m, n について, 多項式 $f_{m,n}$ を以下のものとする.

$$f_{m,n}(x_1, x_2, x_3) = x_1^m(x_2^n - x_3^n) - x_2^m(x_1^n - x_3^n) + x_3^m(x_1^n - x_2^n).$$

このとき, 任意の 3 次の置換 $\sigma \in S_3$ について, $\sigma f_{m,n} = (\text{sgn } \sigma) f_{m,n}$ が成り立つことを示せ. そして, $f_{m,n}(x_1, x_2, x_3)$ は差積 $D(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ で割り切れることを示せ.

(2) $(m, n) = (3, 2)$ のとき, 多項式 $g(x_1, x_2, x_3) = \frac{f_{3,2}(x_1, x_2, x_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}$ を求めよ.