2013年度

線型代数学演習A

No.10 問題

2013年6月17日実施

○ 記号: $i=\sqrt{-1}\in\mathbb{C}$ で虚数単位を表す.

$\boxed{1}$ 以下の複素行列について, 行基本変形のみを施すことにより, 簡約行列, 即ち, 階段行列であって, その階数を r とし, 第 j 行 $(1\le j\le r)$ の 0 でない成分のうち最も左にある成分を a_{jk_j} とするとき, $a_{jk_j}=1$ であり, かつ第 k_j 列の他の成分は 0 である行列に変形せよ. その際, その行基本変形の具体的な操作も記述せよ.

(1) $\begin{pmatrix}5&-3&2&6\\3&4&-3&1\\7&1&-5&-2\\0&-2&3&4\end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-2&1\\-1&-2&3&3&-4\\0&2&-4&5&-3\\2&-1&4&-3&0\end{pmatrix}$.

$\boxed{2}$ 以下で与えられる n 次複素正則行列 $A\,(n=3,4)$ について, A と n 次単位行列 E_n を並べて得られる $(n,2n)$ 複素行列を $\widetilde{A}=(A\ \ E_n)$ とおく. このとき, $\widetilde{A}$ に行基本変形のみを施して, $\widetilde{B}=(E_n\ \ B)$ と変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\i&0&i\\1&1&0\end{pmatrix}$. (2) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.

$\boxed{3}$ $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ とする. すると, A の逆行列は存在しないが, $AC=E_3$ (3次単位行列) なる $(4,3)$ 複素行列 $C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\\c_{41}&c_{42}&c_{43}\end{pmatrix}$ は存在する. このような C を以下の手順ですべて求めたい.

(1) $c_{41}=c_{42}=c_{43}=0$ なる $(4,3)$ 複素行列 C で, $AC=E_3$ となるものを求めよ.

(2) $AX=O$ なる $(4,3)$ 複素行列 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{pmatrix}$ をすべて求めよ.

(3) $AC=E_3$ なる $(4,3)$ 複素行列 C をすべて求めよ.