

線型代数学演習 A

No.9 問題

2013 年 6 月 10 日実施

- [1] 以下の複素行列について, (有限回の) 基本変形を施すことにより, $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形せよ. その際, 基本変形の具体的な操作も記述せよ. なお, 最終形において, 下の 2 つの O , あるいは右の 2 つの O は現れないことがある.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 7 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- [2] $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられるものとする.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

そして, これらの数ベクトルを並べて得られる行列を $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$ とする.

(1) A に 行基本変形 のみを施すことにより, 階段行列 B に変形せよ. その際, その変形の具体的な操作も記述せよ.

(2) $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ とし, $r = \dim W$ とする. このとき, $\{\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_r}\}$ が W の基底となる $\mathbf{a}_{k_1}, \dots, \mathbf{a}_{k_r}$ ($k_1 < \dots < k_r$) を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ から一組選べ.

- [3] (1) m, n を正整数, r を $0 < r \leq \min\{m, n\}$ なる整数とし, $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ を階数が r である (m, n) 複素行列とする. さらに, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は一次独立であるとする. このとき, (m, r) 行列 B および (r, n) 行列 C で, $A = BC$ となるものが存在することを示せ.

(2) 4 次複素正方行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, A の階数 $r = \text{rank} A$ を求めよ.

さらに, $(4, r)$ 行列 B および $(r, 4)$ 行列 C で, $A = BC$ となるものを一組与えよ.