

線型代数学演習 A

No.8 問題

2013年6月3日実施

[1] 以下の $\mathbb{C}^3$ の部分集合 $S \subset \mathbb{C}^3$ が部分ベクトル空間であるか、理由をつけて答えよ.

$$(1) S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; 2|x_1| - 3|x_2| - x_3 = 0 \right\}.$$

$$(2) S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

$$(3) S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 \right\}. \quad (4) S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; \begin{array}{l} x_1 = x_2^2 = x_3^3, \\ x_1^2 = x_2^5 = x_3^7, \\ x_1^4 = x_2^6 = -x_3^9 \end{array} \right\}.$$

[2] $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{C}^5$ を以下のものとする.

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

そして, $W_1 = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, $W_2 = \langle x_4, x_5 \rangle \subset \mathbb{C}^5$ をそれぞれ x_1 と x_2 と x_3 , x_4 と x_5 で生成される $\mathbb{C}^5$ の部分ベクトル空間とする.

(1) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組与えよ.

(2) (1) で得られる $W_1 \cap W_2$ の基底に適当なベクトルを付け加えることにより, $W_1 + W_2$ の基底を一組与えよ.

[3] V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とし, $W_1, W_2, W_3 \subset V$ を部分ベクトル空間とする.

(1) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるとする. このとき, $(W_1 + W_2) \cap W_3 = (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$ が成り立つためには, $\dim((W_1 + W_2) \cap W_3) = \dim(W_1 \cap W_3) + \dim(W_2 \cap W_3)$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, $W_1 \cap W_3 = \{0\}$ であるとする. このとき, $W_1 + (W_2 \cap W_3) = (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$ が成り立つためには, $W_1 \cap (W_2 + W_3) = \{0\}$ が成り立つことが必要十分であることを示せ.