

線型代数学演習 A

No.7 問題

2013 年 5 月 27 日実施

- 記号: n を正整数とすると、 n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする.

- 1 a, b を複素数とし, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられる 4 次複素数ベクトルとする.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) v_1, v_2, v_3 が一次従属となる a, b がみたす必要十分条件を求めよ.
 (2) v_1, v_2, v_3, v_4 が一次従属となる a, b の必要十分条件を求めよ.

- 2 $V = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ を高々 3 次複素係数一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする.

- (1) $f_1(x) = x^2 - 2, f_2(x) = x^2 - 2x, f_3(x) = x^3 - 4, f_4(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$ とするとき, f_1, f_2, f_3, f_4 が V の基底であることを示せ.
 (2) 線型写像 $T: V \rightarrow V$ を以下で与えられるものとする.

$$Tf(x) = (x^2 - 2x)(f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)) - 2f(1)(x^2 - 2), f \in V.$$

このとき, T の $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ に関する行列表示を求めよ.

- 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし, $M(3, \mathbb{C})$ の次の部分集合 M, M' を考える.

$$M = \{X \in M(3, \mathbb{C}); AX = XA\},$$

$$M' = \{Y \in M(3, \mathbb{C}); \text{任意の } X \in M \text{ について } XY = YX\}.$$

- (1) M を具体的に求めよ.
 (2) $M = M'$ を示せ.