

線型代数学演習 A

No.6 問題

2013年5月20日実施

- 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.
- 記号: n を正整数とすると, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする.

- [1] $V = \{a_3x^2 + a_2x^2 + a_1x + a_0; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ を高々3次複素係数一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $T: V \rightarrow V$ を次で与えられる線型写像とする.

$$Tf(x) = x(f(x+1) - f(x-1)) - 3f(1)x.$$

この T について, V の以下の基底 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ に関する行列表示を求めよ.

(1) $f_0(x) = 1$ (定数項のみの多項式), $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3$.

(2) $f_0(x) = 3x - 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2 - x, f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$.

- [2] $V = \mathbb{C}^3, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, 線型写像 $f: V \rightarrow V$ を $f(x) = Ax$ ($x \in V = \mathbb{C}^3$)

で与えられるものとする. そして, $e_j \in \mathbb{C}^3$ ($j = 1, 2, 3$) を, それぞれ第 j 成分が 1, それ以外の成分が 0 である基本ベクトルとする. このとき, 以下のベクトル $v_1, v_2, v_3 \in V = \mathbb{C}^3$ について, 基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

(1) $v_1 = e_1 - ie_2, v_2 = e_1 + ie_3, v_3 = e_1 - e_2 - e_3$.

(2) $v_1 = e_2 - e_3, v_2 = 2e_1 - e_2 - e_3, v_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

- [3] $V = M(2, \mathbb{C})$ とし, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする. いま, V 上の線型写像 $\Phi: V \rightarrow V$ を $\Phi(X) = AXB$ ($X \in V = M(2, \mathbb{C})$) で与える.

(1) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, $\{X_1, X_2, X_3, X_4\} \subset V = M(2, \mathbb{C})$ が V の基底であることを示せ.

(2) $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ に関する Φ の行列表示を求めよ.