

線型代数学演習 A

No.5 問題

2013年5月13日実施

○ 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.

[1] 以下の写像 $f : A \longrightarrow B$ が単射であるかどうか, また, 全射であるかどうか, 理由をつけて答えよ.

(1) $A = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $n \in A$ に対して, $f(n)$ は $2n$ を 6 で割ったときの余り, 即ち, $2n = 6m + r$ (m, r は整数, $0 \leq r \leq 5$) としたとき, $f(n) = r$.

(2) $A = \{a + bi \in \mathbb{C}; a > 0\}$, $B = \mathbb{C} \setminus \{a \in \mathbb{R}; a \leq 0\}$, $f(z) = z^2$ ($z = a + bi \in A$).

[2] 以下の写像 $f : V \longrightarrow W$ が $\mathbb{R}$ 上の線型写像であるかどうか, 理由をつけて答えよ.

(1) $V = W = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

(2) $V = W = \mathbb{R}^2$ とし, $\mathbb{R}^2$ 内の直線 $l : 2x_1 + 3x_2 - 2 = 0$ について, $\mathbf{x} \in V = \mathbb{R}^2$ に対して, l に関して対称な点 $\mathbf{y} \in W = \mathbb{R}^2$ を対応させる写像 $f : V \longrightarrow W$.

(3) $V = W = \mathbb{R}^2$ とし, $\mathbb{R}^2$ 内の 2 本の直線 $l_1 : x_1 - x_2 + 1 = 0$, $l_2 : x_1 - x_2 + 2 = 0$ について, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, l_1, l_2 に関して対称な点 $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)} \in \mathbb{R}^2$ を対応させる写像をそれぞれ $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とするとき, 合成写像 $f = f_1 \circ f_2 \circ f_1 : V \longrightarrow W$.

[3] X, Y を集合, $f : X \longrightarrow Y$ を写像とし, $S \subset Y$ を Y の部分集合とする. このとき, S の f による**逆像** $f^{-1}(S) \subset X$ とは, $f(x)$ が S の元である X の元 $x \in X$ すべてからなる X の部分集合である.

$$f^{-1}(S) = \{x \in X; f(x) \in S\} \subset X.$$

この定義に基づいて, 以下の集合 X, Y, f, S について, $f^{-1}(S) \subset X$ を具体的に求めよ.

(1) $X = [-2, 3]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ ($x \in X$), $S = [-2, 3]$.

(2) $X = [0, 3\pi]$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ ($x \in X$), $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ としたとき, $S = f(A) = \{f(x) = \cos x \in \mathbb{R}; x \in A\}$.