

線型代数学演習 A

No.4 問題

2013 年 5 月 8 日実施

- 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.
- 記号: n を正整数とすると, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする.

1 2 次複素正方行列 $X = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 13 & -5 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ を, 次の 4 個の行列の一次結合として表せ.

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = B_1 B_2^2, B_4 = B_1 B_2 B_1 B_2.$

2 $A \in M(3, \mathbb{C})$ が与えられたとき, A と交換可能な 3 次複素正方行列全体のなす集合を M_A と表すとする.

$$M_A = \{X \in M(3, \mathbb{C}); AX = XA\}.$$

A が以下のものであるとき, M_A を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

3 X を 2 次複素正則行列, Y を 2 次複素正方行列とする.

(1) $XY + X = YX + Y$, かつ $(X - Y)(X + Y + E_2) = O$ が成り立てば, Y は正則であることを示せ. ここで, E_2 は 2 次単位行列とする.

(2) (1) の条件が成り立つとき, $(X + Y)(X - Y)(X + Y)$ を X と Y の一次結合で表せ.