

線型代数学演習 A

No.3 問題

2013 年 5 月 2 日実施

○ 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.

- [1] $V = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}\}$ で高々 3 次の複素係数一変数多項式全体のなす集合を表し, 通常のとスカラー倍により, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考える. このとき, 以下の多項式たち $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ が一次独立か, あるいは一次従属か, 根拠をもって答えよ.

$$(1) f_1(x) = x^3 + ix^2, f_2(x) = x^3 - 1, f_3(x) = x^2 - x, f_4(x) = ix + 1.$$

$$(2) f_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, f_2(x) = x^3 - 7x + 6, f_3(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, f_4(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

- [2] $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{連続}\}$ で $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を表し, 関数としての通常のと実数倍により, $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える. このとき, 以下の関数たちが一次独立であることを証明せよ.

$$(1) f_1(x) = \cos x, f_2(x) = \cos 2x, f_3(x) = \cos 3x.$$

$$(2) f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = 1 (\text{定数関数}), f_3(x) = e^x, f_4(x) = e^{2x}.$$

- [3] n を $n \geq 2$ なる整数とし, V を $\dim V \geq n$ なる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする.

(1) $x_1, \dots, x_n \in V$ とする. もし, $x_1 \neq 0$ であり, かつ $2 \leq k \leq n$ なる任意の整数 k について, x_k が $x_1, \dots, x_{k-1}$ の一次結合で表されないならば, $x_1, \dots, x_n$ は一次独立であることを示せ.

(2) V の元 $x_1, \dots, x_n$ で, この中から相異なるどの $n-1$ 個のベクトルをとっても一次独立であるが, $x_1, \dots, x_n$ は一次従属となるものがある. このような V および $x_1, \dots, x_n \in V$ の例を, $n \geq 2$ なる任意の整数 n について一つずつ与えよ. その際に, $n-1$ 個のベクトルの一次独立性と, n 個のベクトルの一次従属性も示せ.