2013年度

線型代数学演習A

No.2 問題

2013年4月22日実施

○ 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.

$\boxed{1}$ 以下の3次複素数ベクトルと考える.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属であることを, 一次関係を与える, 即ち, $\alpha\boldsymbol{x}_2 + \beta\boldsymbol{x}_3 + \gamma\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{0}$, かつ $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ なる複素数 α, β, γ を一組与えることにより示せ.

$\boxed{2}$ a, b を複素数とし, 以下の4次複素数ベクトルを考える.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(1) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ とする. このとき, $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ ならば, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は一次従属であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ とする. もし, $x_1y_2 - x_2y_1$, $x_2y_3 - x_3y_2$, $x_3y_1 - x_1y_3$ がすべて0であるならば, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ は一次従属であることを示せ.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ が一次独立であり, かつ $x_2y_3 - x_3y_2 = x_3y_1 - x_1y_3 = 0$ となる例を一つ挙げよ. その際に, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ の一次独立性, および上の二つの等式が成り立つことも示せ.