

線型代数学演習 A

No.1 問題

2013 年 4 月 15 日実施

○ 記号: $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ で虚数単位を表す.

[1] (1) $z^4 = -i$ なる複素数 z で, 偏角が最小の正実数となるものを求めよ. ただし, z の実部, 虚部ともに $\cos, \sin$ のままにせず, 根号を用いて表せ.

(2) $z^4 = -81i$ となる複素数をすべて求めよ. このときも, z の実部, 虚部ともに $\cos, \sin$ のままにせず, 根号を用いて表せ.

[2] a, b を実数で, $a \neq 0$ かつ $(b+a)(b-3a) < 0$ なるものとし, $f(z) = az^3 + bz^2 + bz + a$ とする.

(1) ある複素数 α について, $f(\alpha) = 0$ となるならば, $f(\alpha^{-1}) = 0$ をみたすことを示せ.

(2) $f(\alpha) = 0$ をみたす複素数の絶対値は 1 であることを示せ.

[3] (1) z_1, z_2, z_3 を相異なる複素数とする. このとき, 複素平面において z_1, z_3 を結ぶ線分と z_2, z_3 を結ぶ線分が直交するためには, $\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$ が 0 でない純虚数となることが必要十分であることを示せ.

(2) 複素数 α および正実数 r について, α を中心とし, 半径が r の複素平面内の円周とは, 次の部分集合のことである.

$$\{z \in \mathbb{C}; |z - \alpha| = r\} \subset \mathbb{C}.$$

また, 複素平面内の円周上の異なる 2 点 β, γ について, β, γ を結ぶ線分上に円の中心が存在するとき, この円周は β, γ を両端とする円周と呼ぶ. いま, z_1, z_2 を相異なる複素数とする. このとき, 複素数 z が複素平面内の z_1, z_2 を両端とする円周上に存在することと, $z = z_1, z_2$ あるいは $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ が 0 でない純虚数であることが同値であることを, 複素平面内の円周の定義 に基づいて示せ.

(ヒント: 共役複素数の定義より, 複素数 w が純虚数であることは, $\bar{w} = -w$ と同値である. そして, 円周の定義において, $|z - \alpha| = r$ を $|z - \alpha|^2 = r^2$ に替えてもよい. また, z_1, z_2 を両端とする円周の中心と半径がどのようなものか考えよ.)