

線型代数学演習 A

No.13 例題

2013年7月8日実施

- 1 以下の正方行列 A について、行または列に沿って展開することにより、行列式 $\det A$ を計算せよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(略解) (1)

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad - \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - ((0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - (1 \cdot 1 - 1 \cdot 1)) \\ &\quad + ((1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) - (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)) \\ &= 1 - (-1) + 1 = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \det A &= 2 \cdot (-1)^{1+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+5} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -2 \cdot (-2) \cdot (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot (-2) \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 8 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) - (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 32 - 1 = 31. \end{aligned}$$

(参考: 行や列に沿った展開は、ひたすら行のみ、あるいは列のみとこだわる必要はなく、行列によって適宜どちらかに沿った展開を行えばよい。また、単に行列式を求めるのであれば、行や列に沿った展開公式のみを用いるというのではなく、必要に応じて基本変形や置換を用いた定義を併用すればよい。)

□2 (3, 4) 複素行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ について, 2 次, 3 次の小行列式をすべて計算せよ.

そして, それに基づいて, A の階数 $\text{rank} A$ を求めよ.

(略解) まず, 2 次の小行列式を求める.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5, & \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10, & \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = -5, \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5, & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -10, & \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 - 4 \cdot 4 = -15, \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10, & \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 8 - 4 \cdot 1 = 20, & \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = -10, \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 10, & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = -20, & \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 2 - 8 \cdot 4 = -30, \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0, & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0, & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 0, & \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} &= 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = 0, & \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} &= 4 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

次に, 3 次の小行列式を, 置換を用いた定義に基づいて求める.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \\ &= 72 + (-72) + (-32) + 12 + 32 + (-12) = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 18 + (-18) + (-8) + 48 + 8 + (-48) = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 8 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + 1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 24 + (-24) + (-4) + 64 + 4 + (-64) = 0, \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 16 + (-16) + (-6) + 96 + 6 + (-96) = 0. \end{aligned}$$

従って, A の階数は $\text{rank} A = 2$ である.

(参考: $\text{rank} A$ は A を行基本変形することにより求めることができる. また, A の第 3 行は第 2 行の 2 倍であるから, 小行列式を計算する 4 個の 3 次正方行列もすべて第 3 行が第 2 行の 2 倍であり, 3 次の小行列式はすべて 0 であることがわかる.)