

線型代数学演習 A

No.12 例題

2013 年 7 月 1 日実施

- 記号: n を正整数とすると、 n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を S_n と表すことにする.

- [1] 以下の n 次正方行列 A ($n = 3, 4$) について、置換を用いた行列式の以下の定義に基づいて、行列式 $\det A$ を計算せよ.

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(略解) (1) S_3 のすべての元の符号を求めると、 $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$, $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$, $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$, $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$, $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$ であるから、

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) \\ &\quad + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ &= 4 - 6 + 2 - 1 - 3 + 1 = -3. \end{aligned}$$

(2) 定義通り計算すると、 S_4 の元の個数は 24 であるから、24 個の積の和を考えなければならない。ところが、この行列の幾つかの成分は 0 であるから、定義に現れる幾つかの項が 0 となる。本質的に残る項に対応する S_4 の元は以下のものである。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

それぞれを巡回置換の積で表すと、順に $(1, 2)(3, 4)$, $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 4)$, $(1, 3, 2, 4)$ であるから、符号は順に 1, -1 , 1, -1 となる。よって、

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &\quad + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 + 1 - 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

- 2 以下の正方行列 A について、行列式を計算しやすくなるように基本変形を施して、行列式 $\det A$ を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (2) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(略解) (1) A を上半三角行列に変形することにより、行列式を計算する.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-4) = 4. \end{aligned}$$

(2) A を上半三角行列に変形して、行列式を計算する.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 \cdot (-4) \cdot (-4) = -64. \end{aligned}$$

(参考: (2) の A について、すべての成分が偶数であるから、各行 (あるいは各列) について、2 をくくり出すことにより、行列式の計算は比較的容易になる. 特に、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと, } A = 2B \text{ であるが, 基本変形という観点からす}$$

ると, A は B のすべての行 (あるいはすべての列) を 2 倍して得られる行列と考えられる. よって, $\det A = 2^4 \det B = 16 \det B$ である. なお, $A = 2B = (2E_4)B$ であるが, $2E_4$ は対角成分がすべて 2 となる上半三角行列である (下半三角行列でもある) から, $\det(2E_4) = 2^4 = 16$ である. このことから, $\det A = 2^4 \det B = 16 \det B$ であることがわかる. 一般に, n を正整数, $c \in \mathbb{K}$ とするとき, $\det(cE_n) = c^n$ である. そして, 任意の n 次正方行列 A について, $\det(cA) = c^n \det A$ である. ちなみに, 上と同様の操作により, $\det B = -4$ であり, 確かに $\det A = 16 \cdot (-4) = -64$ である.)