

線型代数学演習 A

No.11 例題

2013年6月24日実施

- 記号: n を正整数とすると、 n 次の置換全体のなす集合 (n 次対称群) を S_n と表すことにする.

[1] 以下の置換 σ を、互換の積として表せ. さらに、符号 $\text{sgn } \sigma$ を求めよ.

$$(1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(略解) まず、 σ を巡回置換の積で表し、それぞれの巡回置換を互換の積で表す.

(1) $\sigma = (1, 3, 6)(2, 7)(4, 5)$ である. そして、 $(1, 3, 6) = (1, 6)(1, 3)$ であるから、 $\sigma = (1, 6)(1, 3)(2, 7)(4, 5)$. よって、 σ は 4 個の互換の積であるから、 $\text{sgn } \sigma = (-1)^4 = 1$.

(2) $\sigma = (1, 6, 4, 3)(2, 5, 8)$ である. ここで、 $(1, 6, 4, 3) = (1, 3)(1, 4)(1, 6)$ 、 $(2, 5, 8) = (2, 8)(2, 5)$ であるから、 $\sigma = (1, 3)(1, 4)(1, 6)(2, 8)(2, 5)$. よって、 σ は 5 個の互換の積であるから、 $\text{sgn } \sigma = (-1)^5 = -1$.

(参考: 巡回置換を互換の積で表す方法は一通りではない. 例えば、 $(1, 3, 6) = (1, 3)(3, 6)$ でもある. 一般に、長さ r ($r \geq 3$) の巡回置換 $(i_1, i_2, \dots, i_r)$ について、

$$(i_1, i_2, \dots, i_r) = (i_1, i_r) \cdots (i_1, i_3)(i_1, i_2) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \cdots (i_{r-1}, i_r).$$

いずれにせよ、長さ r の巡回置換は $r - 1$ 個の互換の積で表される. (このことは、 $r = 1, 2$ でも成り立つ.) よって、置換 σ の符号を求めるだけであれば、 σ を巡回置換の積で表すだけで十分である. 実際、(1) については、 σ が長さ 3 の巡回置換と、2 個の長さ 2 の巡回置換 (互換) の積で表されるから、 $\text{sgn } \sigma = (-1)^{3-1} \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$ である. (2) については、 σ が長さ 4 の巡回置換と長さ 3 の巡回置換の積で表されるから、 $\text{sgn } \sigma = (-1)^{4-1} \cdot (-1)^{3-1} = -1$ である.)

2 $\sigma = (2, 5, 3, 7) \in S_7$ を長さ 4 の (7 次) の巡回置換とする.

(1) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき, $\tau\sigma\tau^{-1}$ を巡回置換として表せ.

(2) $\rho = (6, 4, 1, 3)$ を長さ 4 の (7 次) の巡回置換とすると, $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$ なる 7 次の置換を一つ与えよ.

(略解) (1) $(\tau\sigma\tau^{-1})\tau = (\tau\sigma)(\tau^{-1}\tau) = (\tau\sigma)1_n = \tau\sigma$ であるから $1 \leq j \leq 7$ なる整数 j について, $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(j)) = \tau\sigma\tau^{-1}\tau(j) = \tau\sigma(j)$. 即ち,

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \tau(5) & \tau(6) & \tau(7) \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \tau\sigma(3) & \tau\sigma(4) & \tau\sigma(5) & \tau\sigma(6) & \tau\sigma(7) \end{pmatrix}.$$

ここで, $\sigma = (2, 5, 3, 7)$ であるから, $\sigma(j) = j$ ($j = 1, 4, 6$) であり, $\sigma(j) \neq j$ なる j に着目すると, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(2), \tau(5), \tau(3), \tau(7)) = (4, 6, 2, 1)$.

(2) (1) の解法を参考にして, $\tau(2) = 6, \tau(5) = 4, \tau(3) = 1, \tau(7) = 3$ なる置換 $\tau \in S_7$ を考える. すると, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{2, 5, 3, 7\} = \{1, 4, 6\}$ であり, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \setminus \{6, 4, 1, 3\} = \{2, 5, 7\}$ であるから, τ が全単射であることより, $\{\tau(1), \tau(4), \tau(6)\} = \{2, 5, 7\}$ でなければならない. そこで, τ を次のように定義する.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$j = 1, 4, 6$ のとき, $\sigma(j) = j$ であるから, $\tau\sigma(j) = \tau(j)$ となる. ゆえに, $k = 2, 5, 7$ のとき, それぞれ $j = 1, 4, 6$ とすれば $k = \tau(j)$ と表されるから, $\tau\sigma\tau^{-1}(k) = \tau\sigma\tau^{-1}(\tau(j)) = \tau\sigma(j) = \tau(j) = k$. そして, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(2), \tau(5), \tau(3), \tau(7)) = (6, 4, 1, 3) = \rho$ となる. (参考: (2) について, 巡回置換 $\rho = (6, 4, 1, 3)$ は $\rho = (4, 1, 3, 6) = (1, 3, 6, 4) = (3, 6, 4, 1)$ と表すことができる. よって, $\tau \in S_7$ として, 例えば, $\tau(2) = 4, \tau(5) = 1, \tau(3) = 3, \tau(7) = 6$ となるものをとったとしても, (この場合も $\{\tau(1), \tau(4), \tau(6)\} = \{2, 5, 7\}$ であるから,) 上と同様にして, $\tau\sigma\tau^{-1} = \rho$ が成り立つ. そして, $\tau(2) = 1$ あるいは 3 としても, 順に $\tau(5), \tau(3), \tau(7)$ が決まる. ゆえに, 問題の条件をみたす $\tau(2), \tau(5), \tau(3), \tau(7)$ の選び方は, 巡回置換の長さである 4 通りとなる. その上で, $\tau(1), \tau(4), \tau(6)$ を $\{2, 5, 7\}$ から重複がないように選べば, $\tau \in S_7$ は問題の条件をみたす. よって, $\tau(1), \tau(4), \tau(6)$ の選び方は $3! = 6$ 通りであり, τ の選び方は $4 \cdot 6 = 24$ 通りである.)