

線型代数学演習 A

No.10 例題

2013 年 6 月 17 日実施

- 1 以下の複素行列について、(有限回の)行基本変形のみを施すことにより、簡約行列、即ち、階段行列であって、その階数を r とし、第 j 行 ($1 \leq j \leq r$) の 0 でない成分のうち最も左にある成分を a_{jk_j} とするとき、 $a_{jk_j} = 1$ であり、かつ第 k_j 列の他の成分は 0 である行列に変形せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(略解) 行基本変形の具体的な操作はまとめて書くことにする.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各行基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

- (i) 第 2, 3 行にそれぞれ第 1 行の 2 倍, 1 倍を加える.
- (ii) 第 1, 3 行にそれぞれ第 2 行の -1 倍, 1 倍を加える.
- (iii) 第 1, 2 行にそれぞれ第 3 行の $\frac{1}{3}$ 倍, -1 倍を加える.
- (iv) 第 2, 3 行をそれぞれ -1 倍, $\frac{1}{3}$ 倍する.

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iv)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

各行基本変形の具体的な操作は以下の通りである.

- (i) 第 2, 3 行にそれぞれ第 1 行の 1 倍, 2 倍を加える.
- (ii) 第 1, 3 行にいずれも第 2 行を加える.
- (iii) 第 1, 2 行にそれぞれ第 3 行の $-\frac{6}{7}$ 倍, $-\frac{4}{7}$ 倍を加える.
- (iv) 第 1, 2, 3 行をそれぞれ -1 倍, -1 倍, $\frac{1}{7}$ 倍する.

- 2] n を正整数とし, n 次複素正則行列 A について, A と n 次単位行列 E_n を並べて得られる $(n, 2n)$ 複素行列を $\tilde{A} = (A \ E_n)$ とおく. このとき, $\tilde{A}$ に 行基本変形 のみを施して, $\tilde{B} = (E_n \ B)$ と変形することにより, A の逆行列 A^{-1} を求めることができる. この方法を用いて, 以下の A について, 逆行列 A^{-1} を求めよ.

$$(1) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2) \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(略解) 行列 X, Y について, $X \rightarrow Y$ で X に 行基本変形 を施すことにより, Y に変形されることを表すとする. $\tilde{A} = (A \ E_n) \rightarrow (E_n \ B) = \tilde{B}$ であるとする, n 次複素正則行列 P が存在して, $\tilde{B} = P\tilde{A}$ となる. このとき, $(E_n \ B) = P(A \ E_n) = (PA \ P)$ であるから, $PA = E_n$, かつ $P = B$ が成り立つ. よって, $B = P$ は A の逆行列である.

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

従って, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$