

線型代数学演習 A

No.8 例題

2013年6月3日実施

[1] 以下の $\mathbb{C}^3$ の部分集合 $S \subset \mathbb{C}^3$ が部分ベクトル空間であるか, 証明をつけて述べよ.

$$(1) \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; \begin{matrix} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

$$(2) \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \right\}.$$

(略解) (1) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ とおく. そして, $f: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3$) とする. すると, f は線型写像であり, $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^3; f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ である. 即ち, $S \subset \mathbb{C}^3$ は線型写像 f の核 $\text{Ker} f$ である. ゆえに, S は $\mathbb{C}^3$ の部分ベクトル空間である. 実際, $f(\mathbf{0}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} \in \text{Ker} f = S$ であり, $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S$, $\alpha \in \mathbb{C}$ とすると, $S = \text{Ker} f$ より $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') = \mathbf{0}$ となり,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}') = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

ゆえに, $\mathbf{x} + \mathbf{x}', \alpha\mathbf{x} \in \text{Ker} f = S$ であることがわかる.

$$(2) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ とする. すると, } 1^2 - 1^2 + 0^2 = 1 - 1 + 0 = 0, 0^2 - 1^2 + 1^2 =$$

$0 - 1 + 1 = 0$ であるから, $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in S$ である. ここで, $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるが, $1^2 - 2^2 + 1^2 = 1 - 4 + 1 = -2 \neq 0$ であるから, $\mathbf{x} + \mathbf{x}' \notin S$. 従って, S は $\mathbb{C}^3$ の部分ベクトル空間ではない.

[2] $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられる 4 次複素数ベクトルとする.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

そして, $U_1 = \langle v_1, v_2 \rangle, U_2 = \langle v_3, v_4 \rangle \subset \mathbb{C}^4$ を, それぞれ v_1 と v_2, v_3 と v_4 で生成された $\mathbb{C}^4$ の部分ベクトル空間とする.

(1) U_1 と U_2 の共通部分 $U_1 \cap U_2$ の基底を 1 組与えよ.

(2) (1) で与えられる $U_1 \cap U_2$ の基底に適当なベクトルを付け加えて, U_1 と U_2 の和空間 $U_1 + U_2$ の基底を 1 組構成せよ.

(略解) (1) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2$ とすると, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ が存在して, $x = \alpha_1 v_1 +$

$\alpha_2 v_2 = \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ と表される. すると, $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ -2\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ -2\alpha_3 \\ \alpha_4 \\ -\alpha_4 \end{pmatrix}$ が成り立つから,

$2\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 = -\alpha_4$ となる. そこで, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (t, 2t, t, -2t) (t \in \mathbb{C})$ とする

と, $x = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix}$ であり, $x = tv_1 + 2tv_2 \in U_1$, かつ $x = tv_3 - 2tv_4 \in U_2$ であるから,

$x \in U_1 \cap U_2$ である. 従って, $U_1 \cap U_2$ の基底として $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ をとることができる.

(2) v_1, v_2 は一次独立であるから $\dim U_1 = 2$ であり, v_3, v_4 も一次独立であるから

$\dim U_2 = 2$ である. いま, $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると, (1) より $\{v_0\}$ は $U_1 \cap U_2$ の基底で

ある. 特に, $v_0 \in U_1$ であり, v_0, v_1 は一次独立であるから, $\{v_0, v_1\} \subset U_1$ は U_1 の基

底である. 同様にして, $v_0 \in U_2$ であり, v_0, v_3 は一次独立であるから, $\{v_0, v_3\} \subset U_2$

は U_2 の基底である. ところで, $x \in U_1 + U_2$ について, $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ が存在し

て, $x = x_1 + x_2$ と表される. $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_3\}$ はそれぞれ U_1, U_2 の基底であるから,

$\beta, \beta', \gamma, \gamma' \in \mathbb{C}$ が存在して, $x_1 = \beta v_0 + \beta' v_1, x_2 = \gamma v_0 + \gamma' v_3$ と表される. よって,

$x = (\beta + \gamma)v_0 + \beta' v_1 + \gamma' v_3$ となり, $\{v_0, v_1, v_3\}$ は $U_1 + U_2$ を生成する. 次に, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$,

かつ $\alpha v_0 + \beta v_1 + \gamma v_3 = 0$ とすると, $\alpha v_0 + \beta v_1 = -\gamma v_3 \in U_1 \cap U_2$ である. ここで,

$\{v_0\}$ は $U_1 \cap U_2$ の基底であるから, $\delta \in \mathbb{C}$ が存在して, $\alpha v_0 + \beta v_1 = \delta v_0 = \delta v_0 + 0v_1$

である. そして, $\{v_0, v_1\}$ は U_1 の基底であるから, $\alpha = \delta, \beta = 0$ が成り立つ. よっ

て, $\alpha v_0 + 0v_3 = \alpha v_0 = -\gamma v_3 = 0v_0 - \gamma v_3$ であり, $\{v_0, v_3\}$ は U_2 の基底であるから,

$\alpha = \gamma = 0$. 従って, v_0, v_1, v_3 は一次独立である. 以上により, $\{v_0, v_1, v_3\}$ は $U_1 + U_2$

の基底である.