

線型代数学演習 A

No.6 例題

2013年5月20日実施

- 1 V を高々3次複素係数一変数多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とし, $T : V \longrightarrow V$ を次で与えられる線型写像とする.

$$Tf(x) = 2f(x+1) - f(x).$$

この T について, V の以下の基底 $\{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ に関する行列表示を求めよ.

- (1) $f_0(x) = 1$ (定数項のみの多項式), $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$.
 (2) $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$, $f_3(x) = \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x)$.

(略解) (1) $Tf_0(x), Tf_1(x), Tf_2(x), Tf_3(x)$ をそれぞれ計算すると,

$$Tf_0(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_1(x) = 2(x+1) - x = x+2 = 2 \cdot f_0(x) + 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_2(x) = 2(x+1)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 2$$

$$= 2 \cdot f_0(x) + 4 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_3(x) = 2(x+1)^3 - x^3 = x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$

$$= 2 \cdot f_0(x) + 6 \cdot f_1(x) + 6 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x).$$

ゆえに, $(Tf_0, Tf_1, Tf_2, Tf_3) = (f_0, f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (2) $Tf_0(x), Tf_1(x), Tf_2(x), Tf_3(x)$ を $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ の一次結合で表すと,

$$Tf_0(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1 \cdot f_0(x) + 0 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_1(x) = 2(x+1) - x = x+2 = 2 \cdot f_0(x) + 1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_2(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}((x+1)^2 + (x+1)) - \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2$$

$$= 2 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_1(x) + 1 \cdot f_2(x) + 0 \cdot f_3(x),$$

$$Tf_3(x) = 2 \cdot \frac{1}{6}((x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 2(x+1)) - \frac{1}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x)$$

$$= \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + 2$$

$$= 2 \cdot f_0(x) + 2 \cdot f_1(x) + 2 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x).$$

$$\text{よって, } (Tf_0, Tf_1, Tf_2, Tf_3) = (f_0, f_1, f_2, f_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□ $V = \mathbb{C}^2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ とし, 線型写像 $f : V \longrightarrow V$ を $f(x) = Ax$ ($x \in V = \mathbb{C}^2$) で与えられるものとする.

(1) $V = \mathbb{C}^2$ の基底 $\left\{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \left\{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

(2) $V = \mathbb{C}^2$ の基底 $\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

(略解) (1) は $f(u_1), f(u_2)$, (2) は $f(v_1), f(v_2)$ を直接計算することにより解くこともできるが, ここでは, 基底の変換行列を用いて解く. まず, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $V = \mathbb{C}^2$ の基本ベクトルとする. すると,

$$f(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3e_1 + 2e_2, \quad f(e_2) = Ae_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4e_1 - 3e_2.$$

ゆえに, $(f(e_1), f(e_2)) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (e_1, e_2)A$ である.

(1) $(u_1, u_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であり, また, $e_1 = v_1 + v_2, e_2 = v_1$ であるから, $(e_1, e_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる. よって, $f(u_1) = f(e_1) + f(e_2), f(u_2) = -f(e_1)$ より,

$$\begin{aligned} (f(u_1), f(u_2)) &= (f(e_1), f(e_2)) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2)A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) $(v_1, v_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であり, また, $e_1 = -v_1 + v_2, e_2 = 2v_1 - v_2$ であるから, $(e_1, e_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. よって, $f(v_1) = f(e_1) + f(e_2), f(v_2) = 2f(e_1) + f(e_2)$ より,

$$\begin{aligned} (f(v_1), f(v_2)) &= (f(e_1), f(e_2)) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2)A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$