<h1 style="margin: 0;">線型代数学演習 A</h1>

No.5 例題

2013年5月13日実施

1 以下の写像 $f : A \rightarrow B$ が単射であるかどうか調べよ. また, 全射であるかどうか調べよ.

(1) $A = B = [-2, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 2\}$, $f(x) = x^2 - 2$ ($x \in A$).

(2) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ ($x \in A$).

(略解) (1) $f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2$, $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ であるから, $-2 \neq 2$, かつ $f(-2) = f(2)$ となり, f は単射ではない. また, $f(0) = 0^2 - 2 = -2$, かつ f は $[0, 2]$ で単調増加である. そして, f は連続であるから, $y \in [-2, 2]$ なる任意の実数 y について, $f(x) = y$ となる $x \in [0, 2]$ が存在する. (正確には, 「中間値の定理」により保証される.) よって, f は全射である.

(2) f は狭義単調減少である. 即ち, $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x < x'$ であるならば, $f(x) = e^{-x} > e^{-x'} = f(x')$ となる. (このことを正確に示すには, 例えば f の導函数の符号が常に負であることを用いればよい.) ここで, x と x' の立場を入れ替えると, $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x > x'$ であれば, $f(x) < f(x')$ が成り立つ. $x, x' \in \mathbb{R}$, かつ $x \neq x'$ であるとき, $x < x'$, あるいは $x > x'$ が成り立つから, いずれの場合であっても $f(x) \neq f(x')$ が成り立つ. 従って, f は単射である. また, 任意の実数 x について, $f(x) = e^{-x} > 0$ であるから, 例えば $y = 0 \in B = \mathbb{R}$ とすると, $f(x) = y$ となる $x \in A = \mathbb{R}$ は存在しない. 従って, f は全射ではない.

2 以下の写像 $f : V \rightarrow W$ が $\mathbb{R}$ 上の線型写像であるかどうか, 根拠をもって答えよ.

(1) $V = W = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ として, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ について, 直

線 $l : x_1 + x_2 = 0$ に関して対称な点を $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ としたとき, x に対して y を対応させる写像 $f : V \rightarrow W$.

(2) $V = W = \mathbb{R}$ として, $x \in V = \mathbb{R}$ に対して $|x| \in W = \mathbb{R}$ を対応させる写像 $f : V \rightarrow W$.

(略解) (1) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^2$ を任意にとる. すると, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W = \mathbb{R}^2$ は l に関して x と対称な点であるから, x と y の中点 $m = \begin{pmatrix} \frac{x_1+y_1}{2} \\ \frac{x_2+y_2}{2} \end{pmatrix}$ は l 上に存在する. 特に, $x = y$ であれば, それは m とも一致し, l 上に存在する. また, x と y が一致しなければ, x と y を結ぶ線分は l と直交する. 即ち, $y - x = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix}$ は (0 となる場合も含めて) l の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の実数倍となる. ゆえに, 次が成り立つ.

$$\begin{cases} \frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_2 + y_2}{2} = 0, \\ \frac{y_1 - x_1}{1} = \frac{y_2 - x_2}{1}. \end{cases}$$

よって, $y_1 + y_2 = -x_1 - x_2$, $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$ となり, $y_1 = -x_2$, $y_2 = -x_1$ が得られる. 即ち,

$$f(x) = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

ここで, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと, $f(x) = Ax$ と表される. よって, $x, x' \in V = \mathbb{R}^2$, および $\alpha \in \mathbb{R}$ について,

$$f(x + x') = A(x + x') = Ax + Ax' = f(x) + f(x'),$$

$$f(\alpha x) = A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha f(x).$$

従って, f は線型写像である.

(2) $x = 1$, $x' = -1$ とするとき, $f(x) = f(1) = |1| = 1$, $f(x') = f(-1) = |-1| = 1$ であるが, $x + x' = 1 + (-1) = 0$ であり,

$$f(x + x') = f(0) = |0| = 0 \neq 1 + 1 = f(x) + f(x').$$

従って, f は線型写像ではない.