

線型代数学演習 A

No.4 例題

2013 年 5 月 8 日実施

- 記号: $\mathbb{C}$ は複素数体を表す. また, n を正整数とすると, n 次複素正方行列全体のなすベクトル空間を $M(n, \mathbb{C})$ と表すことにする.

□ 1 行列 $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$ を, 以下の行列 A, B, C, D の一次結合で表せ.

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = CBC.$$

(略解) (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, かつ $X = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ であるとする. このとき, 両辺の各成分を比較することにより, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3, \\ -\gamma + \delta = 5, \\ \gamma + \delta = -1, \\ \alpha - \beta = 1. \end{cases}$$

第 1, 4 式より, $\alpha = 2, \beta = 1$. 第 2, 3 式より, $\gamma = -3, \delta = 2$. 従って, $X = 2A + B - 3C + 2D$.

(2) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. いま, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, かつ $X = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ であるとする. すると, 次が得られる.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \delta = 3, \\ \beta + \gamma = 5, \\ \gamma + \delta = -1, \\ -\alpha + \beta + \delta = 1. \end{cases}$$

第 1, 4 式より, $\alpha = 1, \beta + \delta = 2$. これと上の第 2, 3 式より $\beta + \gamma + \delta = 3$. ゆえに, $\beta = 4, \gamma = 1, \delta = -2$. 従って, $X = A + 4B + C - 2D$.

- 2 $A \in M(2, \mathbb{C})$ が与えられたとき, A と交換可能な 2 次複素正方行列全体のなす集合を M_A と表すとする.

$$M_A = \{X \in M(2, \mathbb{C}) ; AX = XA\}.$$

A が以下のものであるとき, M_A を求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(略解) M_A の元を $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ と表すことにする.

$$(1) AX = \begin{pmatrix} 3x_{11} & 3x_{12} \\ -2x_{21} & -2x_{22} \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} 3x_{11} & -2x_{12} \\ 3x_{21} & -2x_{22} \end{pmatrix} \text{ であるから,}$$

$$\begin{cases} 3x_{11} = 3x_{11}, \\ 3x_{12} = -2x_{12}, \\ -2x_{21} = 3x_{21}, \\ -2x_{22} = -2x_{22}. \end{cases}$$

よって, $x_{12} = 0, x_{21} = 0$ であり, x_{11}, x_{22} としてどのような複素数をとっても, 第 1, 4 式は成り立つ. 従って, $M_A = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} ; t_1, t_2 \in \mathbb{C} \right\}$.

$$(2) AX = \begin{pmatrix} 4x_{11} - x_{21} & 4x_{12} - x_{22} \\ 4x_{21} & 4x_{22} \end{pmatrix}, XA = \begin{pmatrix} 4x_{11} & -x_{11} + 4x_{12} \\ 4x_{21} & -x_{21} + 4x_{22} \end{pmatrix} \text{ であることより,}$$

$$\begin{cases} 4x_{11} - x_{21} = 4x_{11}, \\ 4x_{12} - x_{22} = -x_{11} + 4x_{12}, \\ 4x_{21} = 4x_{21}, \\ 4x_{22} = -x_{21} + 4x_{22}. \end{cases}$$

第 1 式より $x_{21} = 0$. 第 2 式より $x_{11} = x_{22}$. このとき, x_{12} としてどのような複素数をとっても上のすべての式が成り立つ. 従って, $M_A = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s \end{pmatrix} ; s, t \in \mathbb{C} \right\}$.

(3) $A = 5E_2$ であり, 任意の 2 次複素正方行列 X について, $E_2X = XE_2 = X$ が成り立つ. よって,

$$AX = (5E_2)X = 5(E_2X) = 5(XE_2) = X(5E_2) = XA.$$

従って, $M_A = M(2, \mathbb{C})$.