

線型代数学演習 A

No.2 例題

2013年4月22日実施

1 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{C}^3$ を以下のものとする.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 上の3個のベクトルから任意に2個のベクトルを取り出したとき、そのベクトルの組は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} \subset \mathbb{C}^3$ は $\mathbb{C}^3$ を生成しないことを示せ.

(略解)(1) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ について, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから, 第2, 3成分より $\alpha = \beta = 0$. よって, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ は一次独立である. $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ については, $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha\mathbf{x}_1 + \gamma\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} 2\alpha + \gamma \\ \gamma \\ \alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, 第2成分より $\gamma = 0$. これを第3成分に代入すると, $\alpha = 0$. ゆえに, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ は一次独立である. また, $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ について, $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ かつ $\beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とすると, $\begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ -\beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるから, 第3成分より $\gamma = 0$. これを第1成分に代入すると, $\beta = 0$. 従って, $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は一次独立である.

(2) $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ をとる. そして, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 = \mathbf{y}$ が成り立

つとする. すると, $\begin{pmatrix} 2\alpha + \beta + \gamma \\ -\beta + \gamma \\ \alpha + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となり, 第2, 3成分より $-\alpha = \beta = \gamma$ となる. これを第1成分に代入すると, $2\alpha - \alpha - \alpha = 0 = 1$ となり矛盾が生じる. よって, このような複素数 α, β, γ は存在しない. これは, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ が $\mathbb{C}^3$ を生成しないことを意味する.

2 t を複素数とし, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \mathbb{C}^4$ を以下で与えられるベクトルとする.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ t \end{pmatrix}.$$

(1) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せ.

(2) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ が $\mathbb{C}$ 上一次従属となる t を求めよ.

(略解)(1) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ とする. すると, $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

となる. 第 1, 4 成分より $\alpha = \gamma = 0$. これを第 2 成分に代入すると, $\beta = 0$. 従って, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は一次独立である.

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ かつ $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 + \delta\mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$ が成り立つとする. ここで, $\delta = 0$ とすると, $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ となるが, (1) より $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ は一次独立であるから, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. これは $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0, 0, 0, 0)$ に反する. よって, $\delta \neq 0$. ゆえに, $\mathbf{x}_4 = -\frac{\alpha}{\delta}\mathbf{x}_1 - \frac{\beta}{\delta}\mathbf{x}_2 - \frac{\gamma}{\delta}\mathbf{x}_3$ となる. 即ち, $\mathbf{x}_4$ は $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ の一次結合で表される. 逆に, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ かつ $\mathbf{x}_4 = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3$ が成り立つとすると, $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3 + (-1) \cdot \mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$ かつ $(\alpha, \beta, \gamma, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$ であるから, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ は一次従属である. ゆえに, $\mathbf{x}_4 = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3$ なる $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ が

存在する複素数 t を求めればよい. このとき, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ \beta + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$ となるから, 第 1 成分より $\alpha = 2$. これを第 2 成分に代入して, $\beta = 2$. さらに, これを第 3 成分に代入すると, $\gamma = 3$. よって, 第 4 成分を比較することにより, $t = \gamma = 3$.