

線型代数学演習 A

No.1 例題

2013年4月15日実施

- [1] (1) $z^6 = -1$ なる複素数 z で、偏角が最小の正実数となるものを求めよ。
 (2) $z^6 = -64$ をみたす複素数をすべて求めよ。

(略解)(1) $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ である。また、 $|-1| = 1$ より $1 = |z^6| = |z|^6$ であるから、 $|z| = 1$ 。ゆえに、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 < \theta \leq 2\pi$) としてよい。すると、 $z^6 = \cos 6\theta + i \sin 6\theta$ であるから、整数 n が存在して、 $6\theta = (2n+1)\pi$ となる。ここで、 $0 < 6\theta \leq 12\pi$ であるから、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ となる。 θ が最小であるとき、 6θ も最小になるから、それは $n = 0$ のときであり、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。従って、 $z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ 。
 (2) (1) と同様に解くこともできるが、(1) と de Moivre の公式を利用して、次のように解くこともできる。 $64 = 2^6$ である。ここで、 $z_0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \sqrt{3}+i$ とおくと、(1) より $z_0^6 = 2^6 \cdot (-1) = -64$ となり、 $\left(\frac{z}{z_0}\right)^6 = \frac{z^6}{z_0^6} = 1$ である。よって、 $\frac{z}{z_0} = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと、 $\theta = \frac{2\pi k}{6} = \frac{\pi k}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) となる。従って、 $z = 2 \left(\cos \frac{\pi(2k+1)}{6} + i \sin \frac{\pi(2k+1)}{6} \right)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) であり、計算すると、 $z = \sqrt{3}+i, 2i, -\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}-i, -2i, \sqrt{3}-i$ 。

- [2] (1) n を正整数、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ を実数で、 $a_n \neq 0$ なるものとする。いま、 $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ とし、 α を複素数とする。このとき、 $f(\alpha) = 0$ ならば、 $f(\bar{\alpha}) = 0$ となることを示せ。
 (2) 実数を係数にもち、 $f(1+i) = f(2-i) = 0$ をみたす多項式 $f(z)$ のうち、次数が最小かつ最高次の係数が1であるものを求めよ。

(略解)(1) $f(\alpha) = \sum_{j=0}^n a_j \alpha^j = 0$ である。また、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ は実数であるから、 $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1, \dots, \bar{a}_n = a_n$ となる。よって、

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha}) &= a_n \bar{\alpha}^n + \dots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = \bar{a}_n \bar{\alpha}^n + \dots + \bar{a}_1 \bar{\alpha} + \bar{a}_0 \\ &= \overline{a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0} = \overline{f(\alpha)} = \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

(2) $f(z)$ の係数はすべて実数で, $f(1+i) = f(2-i) = 0$ であるから, (1) より $f(1-i) = f(2+i) = 0$ となる. よって, 因数定理より (複素数を係数にもつ多項式として) $f(z)$ は $z-1-i, z-1+i, z-2+i, z-2-i$ で割り切れる. よって, $f(z)$ は少なくとも 4 次以上である. そこで, これらの 1 次式の積を $g(z)$ とすると, $g(z)$ は 4 次式で, 4 次の係数は 1 であり,

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-1-i)(z-1+i)(z-2+i)(z-2-i) \\ &= (z^2-2z+2)(z^2-4z+5) = z^4-6z^3+15z^2-18z+10. \end{aligned}$$

この多項式の係数はすべて実数である. 従って, $f(z) = z^4-6z^3+15z^2-18z+10$ が求める多項式である.