理学部1回生向け科目

線型代数学演習 A, B 要約

最終改訂日：2011年3月15日

著 者

河野 明（元京都大学大学院理学研究科教授）

阿部 拓郎，佐藤 隆夫（元同特定助教（グローバル COE））

はじめに

この要約は，京都大学グローバルCOEプログラムの一環により，河野明教授（当時）の監督の下，特定教員（グローバルCOE）が担当した理学部科目線型代数学演習A, B（2009年度，及び2010年度）で使用した参考書です.

科目の対象学生が理学部学生であるため，本要約は理論を重要視して構成されています．数学系に進学を希望される方にとっても，抽象的な議論を展開していくことは，慣れないうちはかなり大変かもしれません．難解な抽象的理論を習得する最善の方法は，**自分で多くの具体例を構成し，それらを通して理解を深め，さらには一般の場合に応用させてみること**です．そのために，当時の演習では具体的な事例についての計算を多く出題しました.

一方で,（あまり推奨されないのですが,）とりあえず計算問題を中心に習得していきたい人のために，以下の各項目について，**具体例を用いた計算方法をまとめた解説文**を巻末に収録しましたので，適宜参照して頂ければ幸いです.

線型写像の行列表示
階数の計算 逆行列の計算 行列式の計算
連立一次方程式の解法（斉次の場合） 連立一次方程式の解法（一般の場合）
正規直交基底の求め方 直交補空間の正規直交基底の求め方 直交射影の求め方
行列の固有値，固有空間の計算，及び対角化，冪乗計算への応用 行列の上三角化の計算

解らないことは恥ずかしいことではありません．演習で解けなかった問題でも，諦めずに何度も繰り返し考え抜くことによって，数学的な感覚のみならず，粘り強い集中力や論証力も自然と身に付いてくると思います．分からないことがあれば何でも遠慮なく質問して下さい.

皆さんが本要約を活用することにより，線型代数学への理解が少しでも深まり，より身近なものに感じられるようになれば，著者一同，大変嬉しく思います.

演習問題とレポート問題について

本要約では，各節の終わりにいくつかの演習問題を設けました．これらは，各単元の理解を深めるだけでなく，授業で行う問題の練習にもなりますので是非一度解かれることを望みます．演習問題の中には少し難しい問題も含まれていますが，このような問題がいきなり解けなくともあまり気にしないで下さい．

大学入試のような難解なレベルの問題を沢山解ける必要はなく（もちろん解ければ良いに越したことはないですが），**基本的な問題を如何に完全にかつ着実に理解するかということが一番大切**だと思います．そうすることによって，次の理論に安心して進むことができます．

一方，11 節と 17 節に，レポート問題の項目を設けました．これらの問題は普通の演習問題に比べ，程度が高く時には多くの場合分けが必要になるなど，解答に多くの時間を要するようなものばかりです．普段の演習問題では扱えないような**多少高度な技術を習得したり**，**粘り強い集中力を養うこと**を目的として出題しました．実力を試してみたい方は是非取り組んでみてください．

例題について

本要約では，10 節と 16 節に，それまでに学習した内容についての，解答付き例題をいくつか収録しました．例題は，基本的なものから難しいものまで，多少幅を持たせてあります．自学自習や，授業での演習問題の解答作成などに活用して頂ければ幸いです．

答案作成についての覚書

以下，数学の答案の作成について，注意してほしい事項を列挙します．是非参考にしてください．

注意 1 問題では，何が問われているかをまず確認すること．

しばしば，問題で問われていること以外の答えが書かれた答案が散見される．典型的な例としては，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求めよ，という問題において，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は答えの 1 つになるが，たまに，

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in K \right\}$$

と，解全体の集合を答えに書いている答案がある．厳密に言えば，これは不正解となるので注意されたい．

注意 2 答えだけの答案.

ごく稀に，答えだけが明記されている答案がある．例えば，$\mathbb{R}^2$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に Schmidt の直交化法を適用して，$\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を求めよ，という問題において，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とだけ書かれている答案.

確かに，本人は計算用紙などで Schmidt の直交化法を用いて計算した（と思われる）のだろうが，採点者からするとこれは確認のしようがないので大きな減点対象となる．たとえ，計算間違いなどで答えが不正解であっても，**論述がきちんとなされていていれば途中点で加点する**ということは往々にしてあり得ることであるが，答えだけしか書いておらず，しかもその答えが間違っていれば確実に不正解となるので注意してほしい.

注意 3 数式だけの答案.

さすがに，答えだけの答案というのは少ないにしても，式変形だけが明記されていている答案はしばしば見受けることがある．確かに，計算に慣れた人であれば，式を見ただけで何をしようとしているか何となく分かるが，**論理を重んじる数学の答案**としてはやはり不十分である．必ず，**日本語で**，**論理的に何をしたいのかを説明する文章**を付け加えてほしい.（別に英語でも構わないが，その場合は全ての解答を英語に統一すること.）そのために，解答例を付した例題をよく参照して頂きたい.

注意 4 論証になっていない答案.

答案の中には，明らかに矛盾する論理で攻めているものや，そもそも意味がよくわからない論理がしばしば存在する．このような答案は，例え解答者のやりたいことが推測できたとしても，減点もしくは不正解にすることもあるので注意して欲しい.

数学は誰が採点しても正解となるような答案が書ける学問である．不十分な論理では採点者によって評価が異なることもあり得るので，出来る限り採点者を納得させられるような論理を用いて答案を作成してほしい．最低限，**何が答案の結論なのかは明示してほしい**.

注意 5 解になっていない.

線型代数では，逆行列や連立一次方程式など多くの計算問題が出題される．論述はしっかりできているが，答えが間違っているという答案も良く見受けられる．ちょっとした計算ミスから，見当違いの計算になってしまっている例まで様々だが，計算問題の多くは検算が可能であるので，解答を書き終えた後は**必ず検算を忘れないようにしてほしい**．少し検算していればあとプラス 20 点，40 点はできるのに，と採点者も歯がゆい気持ちになることがある.

改訂について

この要約を使用して以来，誤植に関するご指摘や，有益なコメントを数多くの方々から頂きました．このような貴重なご意見を下さった学生や TA の方々，及び大学院理学研究科数学教室のスタッフの皆さまに，この場を借りまして厚くお礼申し上げます．

Contents

1　複素平面

1.1　複素数と複素平面

本講の目標

- 線型代数を学習する準備として，複素数の性質について簡単な**復習**を行う．以下の概念は，線型代数学以外の多くの科目においても重宝されるのでしっかり把握しておくことが望まれる．
- **複素平面**なる概念を導入し，複素数全体は**実平面と同一視できる**ことを確認する．
- 複素数の偏角，及び**極座標表示**を理解する．

本要約では，$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ，実数全体の集合，及び複素数全体の集合とする．$\sqrt{-1}$ を虚数単位とするとき，

$$z = a + b\sqrt{-1}, \quad a, b \text{ は実数}$$

と書ける数を**複素数**という．高校においては虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と表し，複素数を $a + bi$ と書いたが，i は添え字等に頻繁に使われる文字であり，混乱を避けるため以下，虚数単位は $\sqrt{-1}$ で表すことにする．

複素数 $z = a + b\sqrt{-1}$ に対して，a，b をそれぞれ，z の**実部**，及び**虚部**といい，

$$\mathrm{Re}(z) = a, \quad \mathrm{Im}(z) = b$$

と表す．**虚部は** $b\sqrt{-1}$ **ではない**ことに注意する．実部が 0 である複素数を**純虚数**という．虚部が 0 である複素数は実数に外ならない．

以下は複素数が持つ基本的な性質である．

複素数の相等

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1} \iff a = c \text{ かつ } b = d.$$

四則演算

$$(a + b\sqrt{-1}) \pm (c + d\sqrt{-1}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{-1}$$
$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}$$
$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1} \qquad (c, d) \neq (0, 0).$$

これらは，$\sqrt{-1}$ を文字のように扱って計算し，$\sqrt{-1}^2$ が出てくる度に -1 に置き換えることによって得られる．

複素数 $z = a + b\sqrt{-1}$ に対して，

$$a - b\sqrt{-1}$$

を z の**共役**な複素数（単に，z の共役ともいう.）いい，$\overline{z}$ で表す．複素数 z, w に関して以下が成り立つ.

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\ \overline{w}.$$

例 1.1 一般に 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \text{ は実数,} \ a \neq 0$$

は，判別式 $D = b^2 - 4ac$ が負のとき，2 つの虚数解

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\ \sqrt{-1}}{2a}$$

を持つ．これらは互いに共役である.

複素数 $z = a + b\sqrt{-1}$ に対して，$z\overline{z} = a^2 + b^2$ は 0 以上の実数である．そこで，

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

で定義される実数 $|z|$ を z の**絶対値**という．ここで，

$$z\overline{z} = |z|^2$$

であり，一般には，$|z|^2 \neq z^2$ であることに注意する．また，$z \neq 0$ のとき，$|z| \geq 0$ であり，

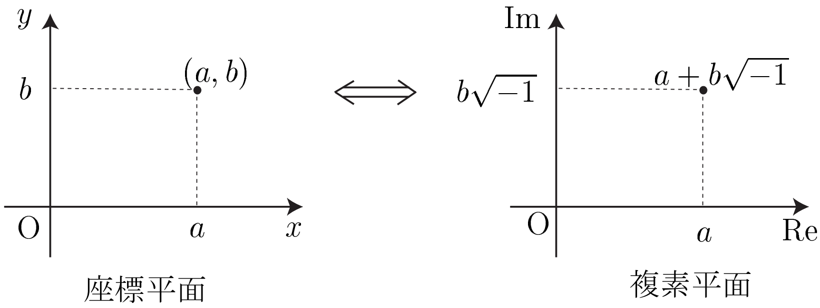
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

である.

次に，複素数を視覚的に捉えることを考えよう．座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) に複素数 $a + bi$ を対応させることによって，平面上の点全体と複素数全体は 1 対 1 に対応する．この対応によって平面を複素数全体とみなしたものを**複素平面**という．複素平面の横軸，縦軸をそれぞれ**実軸**，及び**虚軸**という.

複素平面において，原点 O から z までの長さが z の絶対値に他ならない．また，$z \neq 0$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{O}z}$ が実軸の正の方向から角 θ の位置にあるとする．このとき，θ を z の**偏角**といい，

$$\theta = \arg z$$



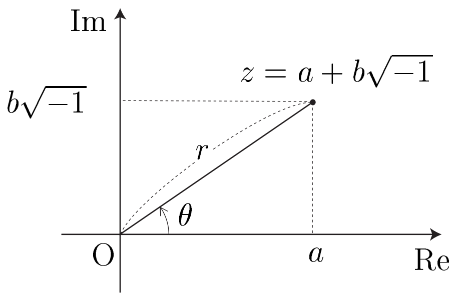
と表す．角 θ は 2π の整数倍を除いて一意的に定まる．今，$r = |z|$ とおくと，

$$a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$$

が成り立ち，

$$z = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

と書ける．このような表し方を z の**極座標表示**または**極形式**という．



複素数の極座標表示を用いると，複素数の乗法（除法）を**視覚的に**捉えることができる．複素数 z, w の極座標表示をそれぞれ，

$$z = r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha), \quad w = r'(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$$

とすると，三角関数の加法定理より

$$zw = rr'(\cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta))$$

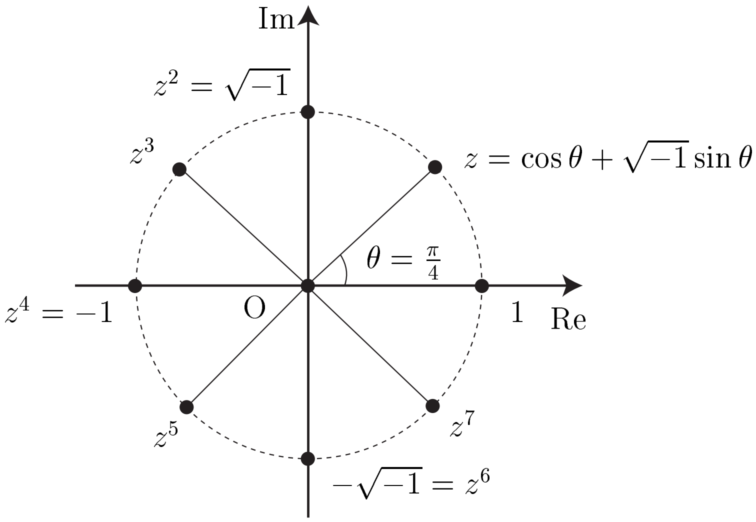
となる．即ち，zw の位置ベクトルは z の位置ベクトルを $|w|$ 倍に拡大（または縮小）したものを，原点 O のまわりに角 $\arg(w)$ だけ回転させたものである．

以下の公式は有名である．

定理 1.2 (ド・モアブルの公式)

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sqrt{-1}\sin n\theta, \quad n \text{ は整数}$$

これは，数学的帰納法によっても証明できるが，複素数 $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ を掛けることが，原点 O の周りの角 θ 回転に対応していることを考えると理解が早い．以下の図は，$\theta=\pi/4$ のときの様子である．



円の方程式

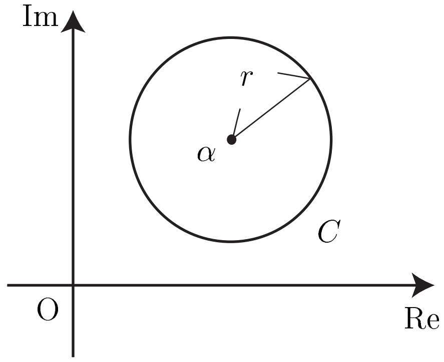
$\alpha\in\mathbb{C}$ とし，$r>0$ を正の実数とする．複素平面上で，

$$|z-\alpha|=r$$

を満たすような複素数 z の集合を

$$C=\{\,z\in\mathbb{C}\mid |z-\alpha|=r\,\}$$

とおく．すると，C は α から距離が r の複素数全体の集合であり，これは複素平面上における，α を中心とする半径 r の円を表している．



垂直二等分線の方程式

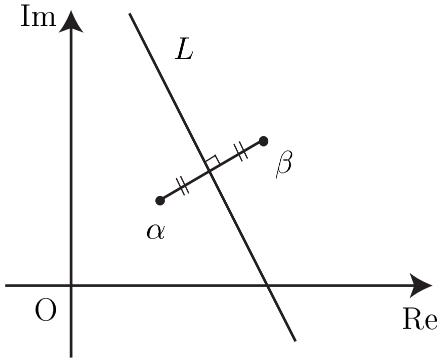
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$ とする．複素平面上で，

$$|z-\alpha| = |z-\beta|$$

を満たすような複素数 z の集合を

$$L = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| = |z-\beta| \,\}$$

とおく．すると，L は α から距離と，β からの距離が等しいようなの複素数全体の集合であり，これは複素平面上における，α と β を結ぶ線分の垂直二等分線を表している．



1.2 演習問題

問題 1.1 任意の複素数 z, w に対して，以下が成り立つことを示せ．

(1) $|zw| = |z|\,|w|$

(2) $\arg(zw) = \arg z + \arg w$

問題 1.2 $n \geq 1$ に対して，1 の n 乗根，即ち，$z^n = 1$ を満たす複素数を全て求めよ．

問題 1.3 $z^3 = \sqrt{-1}$ を満たす複素数を全て求め，それらを複素平面上に図示せよ．

問題 1.4 次の複素数を複素平面上に図示せよ．

$$1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}, \quad 1$$

問題 1.5 複素平面上で，任意の z に対して，以下の各点はそれぞれ，z をどのように移動させて得られるものか述べよ．

$$\bar{z}, \quad \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}z, \quad (-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})z$$

問題 1.6 複素平面上で，$|z-1| = 2|z+1|$ を満たす複素数 z 全体はどんな図形を表すか．

2　数ベクトル空間

<u>本講の目標</u>

- **和**と**スカラー倍**の構造を持つ，数ベクトル空間を理解する．これは，次節以降で扱う一般のベクトル空間において，もっとも基本的かつ重要な例である．
- 数ベクトル空間における，ベクトルの**一次独立**と**一次従属**の概念を理解する．
- 数ベクトル空間の**基底**を理解する．

2.1　数ベクトル

自然数 $n \geq 1$ に対して，n 個の複素数を縦一列に並べたもの

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を n **次元数ベクトル**，または単に**数ベクトル**（もっと単純に**ベクトル**）という．$a_1, \ldots, a_n$ を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい，a_i を $\boldsymbol{a}$ の**第** i **成分**という．以下，ベクトルは実数や複素数と区別して，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のように太文字で表すことにする．ただし，1 次元数ベクトルについては小文字で表すこともある．

n 次元数ベクトル全体の集合を

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

と表す．$\mathbb{C}^n$ には**加法（和）**と**スカラー倍**が次のようにして定義される．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

また，

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

とおく．$\boldsymbol{0}$ を**零ベクトル**という．各ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ である．この状況の下，$\mathbb{C}^n$ は以下の性質（ベクトル空間の公理）を満たす．

1. 結合法則 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2. 和の可換性 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

3. 零元の存在 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

4. マイナス元の存在 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

5. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}, \quad \alpha\in\mathbb{C}$

6. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$

7. $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a}), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$

8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

n 次元数ベクトルで成分が全て実数のものを**実 n 次元数ベクトル**といい，それらの全体を

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$

と表し，**実 n 次元数ベクトル空間**という．明らかに，$\mathbb{R}^n$ 自身もベクトル空間の公理（上記の 1~ 8）を満たす．今後，この節の終わりまで，K は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかを表すことにし，K^n で $\mathbb{R}^n$ または $\mathbb{C}^n$ を表すことにする．

2.2 数ベクトルの一次独立性

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ を K^n のベクトルの組とする．$c_1,c_2,\ldots,c_m\in K$ に対して，ベクトル

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m\in K^n$$

を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ たちの**一次結合**という．

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ たちの一次結合が $\boldsymbol{0}$ になるのは，全ての c_i たちが 0 の場合に限るとき，即ち，

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m=\boldsymbol{0}$$

ならば

$$c_1=c_2=\cdots=c_m=0$$

となるとき，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_m$ は**一次独立**であるという．

また，K^n のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立でないとき，**一次従属**であるという．即ち，少なくとも 1 つが 0 でないような K の元の組 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ に対して，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ場合である．

例 2.1 K^3 において，3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

$x, y \in K$ に対して，$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となったとする．このとき，K^3 における和とスカラー倍の定義より，

$$\begin{pmatrix} x - y \\ y \\ x \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

となり，$x = y = 0$ を得る．ゆえに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は一次独立である．同様に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ も一次独立であることが分かる．一方，簡単な計算により，

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

となることが分かるので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は一次従属となる．

K^n の n 個のベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を**基本ベクトル**という．基本ベクトルたちは一次独立であり，かつ，K^n の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

のように，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ たちの一次結合として一意的に表される．

一般に，K^n のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が次の 2 つの条件:

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は一次独立である．

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は K^n を生成する．即ち，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して，ある $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$ が存在して，

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

と書ける．

をみたすとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は K^n の**基底**であるという. (実はこのとき，$m = n$ である.) 特に，n 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ たちは K^n の基底になる．これを K^n の**標準基底**という．

一次独立性と連立一次方程式

一般に，連立一次方程式（m 変数についての n 個の連立一次方程式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & 0 \\ \qquad\qquad\vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & 0 \end{cases} \tag{1}$$

について，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (0, 0, \ldots, 0)$$

はいつも解になる．これを**自明な解**という．一方,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を K^n の $(m+1)$ 個のベクトルとみなす．すると，連立方程式 (1) は

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

と同値になる．

注意 2.2 連立方程式 (1) が自明でない解を持つとき，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は一次従属であり，(1) が**自明な解しか持たない**とき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は**一次独立**である．

一般に，次のことが知られている．

定理 2.3 連立方程式 (1) は，$m > n$ のとき自明でない解を持つ．

証明 n についての帰納法による．$n = 1$ のとき，方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0$$

について，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \begin{cases} (1, 0, \ldots, 0), & a_{11} = 0 \text{ のとき} \\ (-a_{12}, a_{11}, 0, \ldots, 0), & a_{11} \neq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

は自明でない解である．

次に，$n = 2$ の場合を示してみよう．$m \geq 3$ に対して，連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & 0 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を考える．$a_{11} = a_{21} = 0$ のときは

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (1, 0, \ldots, 0)$$

が自明でない解である．$a_{11} \neq 0$ または $a_{21} \neq 0$ のとき，必要であれば方程式の順序を入れ換えて $a_{11} \neq 0$ としてよい．このとき，

$$①' = ① \times a_{11}^{-1}, \quad ②' = ② - ①' \times a_{21}$$

を考えることにより，

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1m}x_m = & 0 & \cdots ①' \\ \qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2m}x_m = & 0 & \cdots ②' \end{cases}$$

を得る．ここで，

$$a'_{1i} = a_{1i}a_{11}^{-1}, \quad a'_{2i} = a_{2i} - a'_{1i}a_{21}, \quad (2 \leq i \leq m)$$

である．また，明らかに

$$① \text{ かつ } ② \Longleftrightarrow ①' \text{ かつ } ②'$$

である．

さて，$n = 1$ の場合より，($(x_2, \ldots, x_m)$ の方程式を考えると)，

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2m}x_m = 0$$

は自明でない解 $(\alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ を持つ．そこで，

$$\alpha_1 = -(a'_{22}\alpha_2 + \cdots + a'_{2m}\alpha_m)$$

とおくと，$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ は ①$'$, ②$'$ を満たすので，①, ② も満たす．即ち，これは連立方程式 ①, ② の自明でない解である．

一般に，上述の議論と同様の方法により，$n \geq 1$ の場合を仮定して $n+1$ の場合が示される．即ち，帰納法が進む．□

この定理の系として以下のことが得られる．

系 2.4 K^n の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は，$m > n$ のとき一次従属である．

これより，K^n のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であれば，$m \leq n$ であることが分かる．また，次の定理は応用上有益である．

定理 2.5 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を K^n の一次独立なベクトルとし，$\boldsymbol{b}$ を K^n の任意のベクトルとする．このとき，次は同値．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ は一次従属．

(2) $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ たちの一次結合で書ける．

証明 (1) を仮定すると，$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m + c'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かつ，$(c_1, \ldots, c_m, c') \neq (0, \ldots, 0)$ となる，$c_1, \ldots, c_m, c' \in K$ が存在する．$c' = 0$ とすると，$(c_1, \ldots, c_m) \neq (0, \ldots, 0)$ かつ，$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$ となるので，これは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であることに反する．従って，$c' \neq 0$ で，$(-c')\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$ より，

$$\boldsymbol{b} = (-c')^{-1}c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (-c')^{-1}c_m\boldsymbol{a}_m$$

を得る．
(2) を仮定すると，$\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$ である．両辺に $-\boldsymbol{b} = (-1)\boldsymbol{b}$ を加えると，

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{b}) = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m + (-1)\boldsymbol{b}$$

であり，$(c_1, \ldots, c_m, -1) \neq (0, \ldots, 0)$ となる．((2) $\Longrightarrow$ (1) は，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次独立性がなくても成立する．) □

一方，次のことが成り立つ．

定理 2.6 K^n の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であれば，これらは K^n の基底になる．

証明 K^n の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立であるとする．全ての $\boldsymbol{x} \in K^n$ に対して，系 2.4 より，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{x}$ は一次従属である．従って，定理 2.5 より，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で書ける．よって，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は K^n の基底になる．□

次の定理は理論上重要である．

定理 2.7 K^n のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であれば，$n-m$ 個の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ を適当に選ぶことによって，

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$$

が K^n の基底になるようにすることができる.

上の定理において，$\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ は，具体的には以下のようにして求める．まず，系 2.4 より，$m \leq n$ に注意する．$m = n$ であれば定理 2.6．次に，$m < n$ であれば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合として表わすことができないような基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ が存在する．そのような i のなかで一番小さいものを i_1 とすると，定理 2.5 より，

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}$$

は一次独立となる．もし，$m+1 < n$ であれば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}$ の一次結合として表わすことができないような，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ のなかで，番号が一番小さいものを $\boldsymbol{e}_{i_2}$ とする．以下，この操作を繰り返せば，求める一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_{n-m}}$ が得られる.

2.3 演習問題

問題 2.1 K^3 のベクトル

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は K^3 の基底であることを示せ.

問題 2.2 $a \in \mathbb{C}$ とする．$\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と見なしたとき，a が基底であるための必要十分条件を求めよ.

問題 2.3 $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が一次独立なことを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に適当な基本ベクトルを 2 つ付け加えることで $\mathbb{R}^4$ の基底を構成せよ.（それが基底になることも示せ.）

3　抽象ベクトル空間

本講の目標

- 数ベクトル空間の概念を一般化した，**抽象ベクトル空間**を理解する．
- **体とベクトル空間の公理**を理解し，その扱いに慣れる．
- 抽象ベクトル空間にも**一次独立**，**一次従属**，**基底**などの概念が定義されることを理解する．

3.1　体

K を集合とし，K には加法（$a+b$ と表す）及び，乗法（ab と表す）が定義されているものとする．K が以下の条件（体の公理）を満たすとき**体**であるという．

1. 加法の交換法則 $a+b=b+a$

2. 加法の結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$

3. 零元の存在 ある $z\in K$ が存在して，全ての $a\in K$ に対して $a+z=a$ が成り立つ．このとき，z を**零**といい，0 と表す．

4. マイナス元の存在 各 $a\in K$ に対して，$a+b=0$ となる元 $b\in K$ が存在する．このとき，b を a の**マイナス元**といい，$-a$ と表す．

5. 乗法の交換法則 $ab=ba$

6. 乗法の結合法則 $(ab)c=a(bc)$

7. 単位元の存在 ある $u\in K$ が存在して，全ての $a\in K$ に対して $au=a$ が成り立つ．このとき，u を**単位元**といい，1 と表す．

8. 逆元の存在 0 でない各元 $a\in K$ に対して，$aa'=1$ となる元 $a'\in K$ が存在する．このとき，a' を a の**逆元**といい，a^{-1} と表す．

9. 分配法則 $a(b+c)=ab+ac$

10. $0\neq 1$

例えば，有理数全体 $\mathbb{Q}$，実数全体 $\mathbb{R}$，複素数全体 $\mathbb{C}$ などは体であり，それぞれ**有理数体**，**実数体**，**複素数体**と呼ばれる．

定理 3.1 K を体とする．

(1) $a, b, c \in K$ とするとき，

$$a + b = a + c \text{ ならば } b = c$$

(2) $a, b \in K$ とするとき，

$$a + b = 0 \text{ ならば } b = -a$$

(3) $a, b \in K$ とするとき，

$$a + b = a \text{ ならば } b = 0$$

(4) 各 $a \in K$ に対して，

$$0a = 0, \quad (-1)a = -a$$

証明　(1) 実際，

$$\begin{aligned} b &= 0 + b = ((-a) + a) + b = (-a) + (a + b) \\ &= (-a) + (a + c) = ((-a) + a) + c = 0 + c = c \end{aligned}$$

より明らか．
(2) $a + b = 0 = a + (-a)$ と (1) より得られる．
(3) $a + b = a = a + 0$ と (1) より得られる．
(4) $0 = 0 + 0$ であるので，任意の元 $a \in K$ に対して，

$$0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$$

より，$0a = 0$ を得る．一方，$1 + (-1) = 0$ より，任意の元 $a \in K$ に対して，

$$0 = 0a = (1 + (-1))a = 1a + (-1)a = a + (-1)a$$

となる．よって，$(-1)a = -a$ である．□

ところで，$(-1) + (-(-1)) = 0 = (-1) + 1$ であるから，上の定理より $-(-1) = 1$ である．これより，

$$(-1)(-1) = 1$$

が得られる．

以上のことは，実数体や複素数体の場合には当たり前のように使っている事実であるが，体の公理から導かれる性質として，任意の体において成立することに注意しておく．以下，特に断らない限り，一般に K と書いたら体を表すことにするが，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ などと思ってもらってもさほど差し支えはない．

ここで，少し変わった体の例を紹介しておこう．

例 3.2 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を以下のようにしていくつかの部分集合に分けることを考える．一般に，任意の整数 a と自然数 p に対して，

$$a = pb + r, \quad 0 \leq r < p$$

となるような整数の組 b, r が一意的に存在する.（剰余の定理）このとき，b, r をそれぞれ a を p で割ったときの商，余りという．a を p で割った余り r を便宜上，$R(a:p)$ と書くことにする．一般に，整数 a, b, x, y に対して，$a = px + b$ なる関係があったとき，

$$R(a:p) = R(b:p)$$

が成り立つ．従って，これを用いると

$$R(a + R(b:p):p) = R(a+b:p), \quad R(aR(b:p):p) = R(ab:p)$$

が成り立つことが示される.（各自確かめよ.）

$p > 1$ を素数とする．各 $0 \leq r \leq p-1$ に対して，p で割ったときの余りが r になるような整数全体を $[r]$ と書くことにする．集合としては $[r]$ は $\mathbb{Z}$ の部分集合であり，

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \cdots \cup [p-1], \quad [i] \cap [j] = \phi, \quad i \neq j$$

が成り立っている.

さて，

$$\mathbb{F}_p = \{\, [0], [1], \ldots, [p-1] \,\}$$

とおき，$\mathbb{F}_p$ に和と積を

$$[i] + [j] = [R(i+j:p)], \quad [i] \cdot [j] = [R(ij:p)]$$

で定める．これらの演算に関して $\mathbb{F}_p$ は体になることを示そう.

まず，交換法則については，整数における交換法則を利用して，

$$[i] + [j] = [R(i+j:p)] = [R(j+i:p)] = [j] + [i]$$
$$[i] \cdot [j] = [R(ij:p)] = [R(ji:p)] = [j] \cdot [i]$$

となるので明らか．また，$\mathbb{F}_p$ の零と単位元はそれぞれ，$[0], [1]$ である．実際，$[0] \neq [1]$ であり，任意の $[i] \in \mathbb{F}_p$ に対して，

$$[i] + [0] = [0] + [i] = [R(i:p)] = [i], \quad [i] \cdot [1] = [1] \cdot [i] = [R(i:p)] = [i]$$

が成り立つ.

次に，任意の $[i] \in \mathbb{F}_p$ に対して，$[i]$ のマイナス元は $-[i] = [R(-i:p)]$ である．実際，

$$[i] + [R(-i:p)] = [R(i + R(-i:p))] = [R(i-i:p)] = [0]$$

である．また，結合法則が成り立つことは，

$$\begin{aligned}
([i]+[j])+[k] &= [R(i+j:p)]+[k] = [R(R(i+j:p)+k:p)] = [R(i+j+k:p)] \\
&= [R(i+R(j+k:p):p)] = [i]+([j]+[k]), \\
([i]\cdot[j])\cdot[k] &= [R(ij:p)]\cdot[k] = [R(R(ij:p)k:p)] = [R(ijk:p)] \\
&= [R(iR(jk:p):p)] = [i]\cdot([j]\cdot[k])
\end{aligned}$$

から分かる．分配法則については，

$$\begin{aligned}
[i]\cdot([j]+[k]) &= [i]\cdot[R(j+k:p)] = [R(iR(j+k:p):p)] = [R(i(j+k):p)] \\
&= [R(ij+ik:p)] = [R(ij:p)]+[R(ik:p)] = [i]\cdot[j]+[i]\cdot[k]
\end{aligned}$$

より得られる．

最後に，逆元について確かめよう．(これまでの議論において，p が素数であるための必要性はどこにも使ってないことにも注意してほしい.）一般に，p が素数のとき，任意の $1 \leq i \leq p-1$ に対して，i と p は互いに素であるから，

$$ix + py = 1$$

となるような整数 x, y が存在する．このとき，$R(ix:p) = 1$ であるから，

$$[i]\cdot[x] = [R(ix:p)] = [1]$$

となり，$[x] = [i]^{-1}$ であることが示される．

以上により，$\mathbb{F}_p$ は体の公理を満たすことが分かる．通常，$[i]$ は括弧を省略して i と書かれることが多い．

3.2 抽象ベクトル空間

K を体とする．集合 V に対して，以下の演算が定義されているものとする．

I. (加法) 任意の V の 2 つの元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，ある元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} \in V$ が一つ決まる．

II. (スカラー倍) 任意の K の元 $\alpha \in K$ と，任意の V の元 $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，ある元 $\alpha\boldsymbol{a} \in V$ が一つ決まる．

さらに，V が以下の条件（ベクトル空間の公理）を満たすとき，V を K **上のベクトル空間**という．

1. 結合法則 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

2. 交換法則 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

3. 零元の存在 ある元 $\mathbf{0}\in V$ が存在して，$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

4. マイナス元の存在 各 $a\in V$ に対して，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ となる元 $\boldsymbol{a}'\in V$ が存在する．

5. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}, \quad \alpha\in K$

6. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}, \quad \alpha,\beta\in K$

7. $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a}), \quad \alpha,\beta\in K$

8. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

一般に，ベクトル空間 V の元のことを**ベクトル**といい，K の元を**スカラー**という．上の公理において，$\mathbf{0}$ を**零ベクトル**という．また，$\boldsymbol{a}'$ を $\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ と書く．

例 3.3 体 K に対して，

$$K^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\middle|\, a_1,a_2,\ldots,a_n\in K\right\}$$

は，$\mathbb{C}^n$ や $\mathbb{R}^n$ の場合と全く同様にして，自然に加法とスカラー倍が定義され，K 上のベクトル空間になる．これを **K 上の n 次元数ベクトル空間**という．

以下のような事実は，数ベクトル空間においては当たり前のように扱っているが，一般の抽象ベクトル空間においては**ベクトル空間の公理から導かれる**ものである．ベクトル空間の公理に慣れるためにも各自確認してほしい．

定理 3.4 V を体 K 上のベクトル空間とするとき，以下のことが成り立つ．

(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in V$ とするとき，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} \text{ ならば } \boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ とするとき，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a} \text{ ならば } \boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

(3) 各 $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，

$$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, \quad (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$$

証明　(1) 次の式変形から得られる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = (-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= -\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = (-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0}$ ゆえ，(1) の結果から $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を得る．
(3) $0 \in K$ に対して，$0 = 0 + 0$ が成り立つ．従って，

$$0\boldsymbol{a} = (0+0)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a}$$

であるから，(2) より $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を得る．また，$1 + (-1) = 0$ より，

$$1\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a}$$

となる．ベクトル空間の公理より，$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ であり，上の結果から $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ である．即ち，

$$\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

となる．よって，再びベクトル空間の公理から，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ を得る．□

さて，一般のベクトル空間に対しても，数ベクトル空間の場合と全く同様に，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，**一次結合**，**一次独立**，**一次従属**なる概念が定義される．各自確認されたい．

ベクトル空間 V の部分集合 $\mathcal{U}$（**無限集合であっても良い**.）が次の 2 つの条件:

(i) $\mathcal{U}$ に属する相異なる有限個のベクトルは一次独立である．

(ii) V に属する任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in K^n$ は，$\mathcal{U}$ に属する有限個のベクトルたちの一次結合として表わされる．

をみたすとき，$\mathcal{U}$ は V の**基底**であるという．数ベクトル空間の場合と異なる点は，基底 $\mathcal{U}$ が無限集合の場合もある点である．しかしながら，以下，**特に断らない限り**，**ベクトル空間と言えば次のような性質を満たす場合のみを考える**ことにする．

(∗)「ある自然数 N が存在して，任意のベクトルの列 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ は一次従属となる.」

ここで,（後述の議論（定理 4.15）を用いると）上の条件は,

(∗∗)「有限個のベクトルからなる基底が存在する」

と同値であることに注意しておく．実際，ベクトル空間 V が $(*)$ を満たすとすると，

$$l_0 = \max\{\, l \mid \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l \in V \text{ は一次独立} \,\}$$

とおけば，$0 \leq l_0 < N$ より，l_0 は自然数である．このとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{l_0}$ を一次独立なベクトルとすれば，任意のベクトル $\boldsymbol{b} \in V$ に対して，l_0 の定義より，

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{l_0}, \boldsymbol{b}$$

は一次従属．従って $\boldsymbol{b}$ は，定理 2.5 と同様にして，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{l_0}$ の一次結合で書ける．即ち，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{l_0}$ が V の基底であることが分かる．

逆に，V が $(**)$ を満たすとする．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{l_0}$ を V の基底とするとき，定理 4.15 より，$N = l_0 + 1$ とすれば，V の任意の N 個のベクトルは一次従属になることが分かる．即ち，V は $(*)$ を満たす.

例 3.5 n 次元数ベクトル空間 K^n は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ からなる基底を持つ．これを K^n の**標準基底**という.

基底が無限集合になるような例で重要なものをいくつか挙げておこう.

例 3.6 体 K に対して，K とは無関係の文字 x（K 上の**不定元**と呼ばれる.）をとる．このとき，形式的な式

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を K 上の**多項式**という.（これは，飽くまで形式的な式であり，ここでは $\mathbb{R}$ 上の函数とはみなさない.）

$$g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

を K 上の多項式とするとき，

$$f = g \in K[x] \Longleftrightarrow n = m \text{ かつ } a_i = b_i,\ 0 \leq i \leq n$$

である.

さて，K 上の多項式全体の集合を $K[x]$ とき，$K[x]$ に和を，$f, g \in K[x]$ に対して

$$f + g = (a_N + b_N)x^N + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

で定める．ここで，$N = \max\{n, m\}$ であり，$n = N$ のとき，

$$b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = b_N = 0$$

とみなす．$N = m$ の場合も同様である．一方，$K[x]$ にスカラー倍を

$$\alpha f = (\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0)$$

で定める．すると，これらの演算により，$K[x]$ は K 上のベクトル空間になる．また，$K[x]$ の定義から

$$\mathfrak{U} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

は $K[x]$ の基底であることが分かる．

次に，$\mathbb{R}$ 上の函数たちのなすベクトル空間について考えてみよう．

例 3.7 (函数空間) 実数 $\mathbb{R}$ 上の函数 $f(x)$ 全体のなす集合を C とおく．C 上に和とスカラー倍を，任意の $f, g \in C$ 及び，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定める．このとき，C は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．

実際，任意の $f = f(x), g = g(x), h = h(x) \in C$ 及び，実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}$ における交換法則から，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

が成り立つ．ゆえに，C における交換法則

$$f + g = g + f$$

が成り立つ．同様に，C における結合法則

$$(f+g) + h = f + (g+h)$$

も, $\mathbb{R}$ における結合法則から導かれる. 和に関する零は $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, つまり全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $0 \in \mathbb{R}$ を対応させる函数が C の零である. $f \in C$ に対するマイナス元は, $(-f)(x) := -f(x)$ で定義される函数 $-f$ である. また $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$a(f+g) = af + ag,\ (a+b)f = af + ag$$

といった分配法則についても，$\mathbb{R}$ の分配法則から導かれる．さらに，

$$(ab)f = a(bf),\ 1f = f$$

といった性質も同様に示される．よって，C はベクトル空間の公理を満たすので，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となる．

さて，$\mathbb{R}$ 上の多項式

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

を $\mathbb{R}$ 上の函数とみなすことによって，$f \in C$ と思える．(このような f を $\mathbb{R}$ 上の多項式函数ともいう.）2 つの多項式

$$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \in C$$

に対して，

$$f = g \in C \Longleftrightarrow n = m \text{ かつ } a_i = b_i,\ 0 \leq i \leq n$$

が成り立つ．実際，$f = g$ とすると，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = g(x)$ が成り立つ．そこで，$x = 0$ を代入して $a_0 = b_0$ を得る．

一般に，多項式 f を $\mathbb{R}$ 上の函数とみなしたとき，f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり，微分して得られる導函数 $f'(x)$ も多項式となり，従って $\mathbb{R}$ 上の函数と思える．明らかに，$f = g$ のとき，$f' = g'$ であるから，$x = 0$ を代入して，$a_1 = b_1$ を得る．以下この操作を繰り返すと，各 $n \geq 1$ に対して，$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ より，$n! a_n = n! b_n$ を得る．(ここで，$f^{(n)}$ は f の n 階導函数を表す.）従って，$a_n = b_n$ となる．

以上の議論より，$\mathbb{R}$ 上の 2 つの多項式 f, g に対して，$\mathbb{R}[x]$ の元と見る場合でも C の元と見る場合でも，係数が全て等しいときに限り $f = g$ であることが分かる．しかしながら，**$\mathbb{R}$ 上の多項式を $\mathbb{R}[x]$ の元と見るか C の元と見るかということは全く異なる**概念であるので注意されたい．

さて，任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，多項式の組 $1, x, \ldots, x^n$ は C において一次独立であることを示そう．そこで，

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 1 = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

とする．ここで，$\mathbf{0}$ は函数としての零であり，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\mathbf{0}(x) = 0$ となる定数函数である．上式左辺の多項式を $f \in C$ とおく．このとき，各 $0 \leq i \leq n$ に対して，$f^{(i)}(0) = \mathbf{0}(0)$ を考えて，$a_i = 0$ を得る．即ち，$1, x, \ldots, x^n$ は C において一次独立である．

今，$n \geq 1$ は任意であったから，C には有限個のベクトルからなる基底は存在しないことがわかる．

最後に，実数列たちのなすベクトル空間について考えよう．

例 3.8 (数列空間) 実数列全体の集合

$$S = \{\{a_n\} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$$

に和とスカラー倍を

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \quad \alpha\{a_n\} = \{\alpha a_n\}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

と定義すると，S は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．S の零は全ての項が 0 であるような数列 $\mathbf{0} = \{0\}$ であり，各 $\{a_n\} \in S$ に対して，$\{a_n\} \in S$ のマイナス元は $-\{a_n\} = \{-a_n\} \in S$ である．S を $\mathbb{R}$ 上の数列空間という．(S がベクトル空間の公理を満たすことは各自確認されたい.)

S は有限次元ベクトル空間ではない．これは以下のようにして分かる．各 $n \geq 1$ に対して，第 n 項が 1 で，その他の項が 0 であるような実数列を $\mathfrak{a}(n) \in S$ とおく．すると，任意の $n \geq 1$ に対して，$\mathfrak{a}(1), \mathfrak{a}(2), \ldots, \mathfrak{a}(n)$ は S において一次独立である．実際,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathfrak{a}(i) = \mathbf{0} \in S$$

とすると，各 $1 \leq i \leq n$ に対して $a_i = 0$ を得る．即ち，S には有限個の元からなる基底は存在しない．

3.3 演習問題

問題 3.1 各自然数 $0 \leq r \leq 3$ に対して，4 で割ったときの余りが r になるような整数全体を $[r]$ と書くことにする．このとき，集合

$$S = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

に，和と積を

$$[i] + [j] = [R(i + j : 4)], \quad [i] \cdot [j] = [R(ij : 4)]$$

で定める．ここで，$0 \leq R(a : 4) \leq 3$ は a を 4 で割ったときの余りを表す．

(1) S における乗積表

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

を完成させよ.

(2) S は体ではないことを示せ.

問題 3.2 $\mathbb{R}$ の部分集合

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

を考える.

(1) 任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して，$(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ を示せ.

(2) 任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して，$a + b\sqrt{2} \neq 0$ であれば,

$$(a + b\sqrt{2})^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

であることを示せ.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は，実数の和及び積を考えることで体になることを示せ.

(4) 実数における和と積を考えることにより，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は自然に $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であるとみなせる．このとき，$1, \sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の基底であることを示せ.

問題 3.3 $\mathbb{R}$ の部分集合

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \in \mathbb{R} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$$

を考える．ω を 1 の原始 3 乗根 $(-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1})/2$ とするとき，以下の問いに答えよ.

(1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$(a + b\sqrt[3]{2}\omega + c(\sqrt[3]{2})^2\omega^2)(a + b\sqrt[3]{2}\omega^2 + c(\sqrt[3]{2})^2\omega) \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

を示せ.

(2) 任意の $a, b, c \in \mathbb{Q}$ に対して,

$$(a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2)(a + b\sqrt[3]{2}\omega + c(\sqrt[3]{2})^2\omega^2)(a + b\sqrt[3]{2}\omega^2 + c(\sqrt[3]{2})^2\omega) \in \mathbb{Q}$$

を示せ.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ は実数の和及び積を考えることで体になることを示せ.

問題 3.4 $\mathbb{R}^2$ に積と和を,

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + x \\ w + y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vx \\ wy \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathbb{R}^2$ はこの演算に関して体にはならないことを示せ.

問題 3.5 K を体とし，S を 2 次以下の K 上の多項式全体の集合とする．即ち，

$$S = \{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in K\} \subset K[x]$$

とする．このとき，$K[x]$ の和とスカラー倍を用いて S には自然にベクトル空間の構造が入る．

(1) $1,\ x,\ x^2$ は S の基底であることを示せ.

(2) $1,\ 1-x,\ (1-x)^2$ は S の基底であることを示せ.

(3) x^2 を $1,\ 1-x,\ (1-x)^2$ の一次結合として表せ.

問題 3.6 実数 $\mathbb{R}$ 上の函数 $f(x)$ 全体のなす集合を C とおく．C 上に和とスカラー倍を，任意の $f, g \in C$ 及び，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

によって定める．このとき，C は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．

(1) $i, j \geq 1$ を自然数とするとき，

$$\int_0^{\pi} \sin ix \sin jx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi/2, & i = j \end{cases}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，正弦函数の組 $\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx$ は C において一次独立であることを示せ.

4　線型写像（一次写像）

本講の目標

- **写像**の定義とその諸性質（**全射性**，及び**単射性**など）を理解する．
- **線型写像**及び，ベクトル空間の**同型**についての概念を理解する．
- ベクトル空間の**次元**を理解する．

4.1　写像とその性質

この小節では，写像に関する一般的な性質及び，用語を確認する．

二つの集合 S と S' があって，集合 S の各要素 x に，集合 S' のある要素 x' が一つ対応しているとき，この対応を S から S' への**写像**といい，$f : S \to S'$ などと表す．

例 4.1 以下の 2 つの対応について，それらが写像になっているかどうか考えてみよう．

(1) 実数 x に対して，$y^3 = x$ となる実数 y を対応させる対応．

(2) 正の実数 x に対して，$y^2 = x$ となる実数 y を対応させる対応．

(1) 任意の実数 x に対して，$y^3 = x$ となる実数 $y = \sqrt[3]{x}$ が一意的に存在するので，これは写像である．
(2) x を任意の正の実数とする．$x = 0$ のとき，$y^2 = x$ となる実数 y は 0 のみである．一方，$x > 0$ とすると，$y^2 = x$ となる実数 y は $\pm\sqrt{x}$ で，$\sqrt{x} \neq -\sqrt{x}$ であるから，x に対して y が一意的に定まらない．ゆえに，この対応は写像ではない．

写像 $f : S \to S'$ によって，$x \in S$ に対応する S' の元を，f による x の**像**といい，$f(x)$ と表す．$f(x)$ たちの全体を

$$f(S) = \{f(x) \,|\, x \in S\}$$

と書いて，f の**像**という．

例 4.2 実数全体 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，$f(x) = x^2$ で定める．このとき，f の像は負でない実数全体である．即ち，

$$f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq 0\}$$

となる．

写像 $f : S \to S'$ に対して，S の異なる 2 つの元が S' の異なる 2 つの元に対応しているとき，f は**単射**であるという．対偶を考えることにより，

$$f\text{ が単射} \iff f(x) = f(y)\text{ ならば } x = y$$

であることが分かる．即ち，異なる 2 点が同じ点に写るようなことがないとき，f は単射であるという．

写像 $f : S \to S'$ に対して，すべての S' の元 x' が S のある元 x の像になっているとき，f は**全射**である，または**上への写像**であるという．

写像 $f : S \to S'$ が全射かつ単射のとき，**全単射**という．このとき，S の各元と S' の各元は過不足なくちょうど一対一に対応する．従って，S' の各元 x' に対して，$x' = f(x)$ となるような S の元 x が一意的に決まる．これにより，S' から S への写像 $f^{-1} : S' \to S$ が定まる．この f^{-1} を f の**逆写像**という．

例 4.3 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，偶数全体の集合を $2\mathbb{Z}$ とおく．このとき，写像 $f : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ を

$$f(n) = 2n$$

で定義すると，f は全単射になる．

実際，任意の $m \in 2\mathbb{Z}$ に対して，m は偶数ゆえ，ある整数 $m' \in \mathbb{Z}$ が存在して，$m = 2m'$ と書ける．このとき，$m = f(m')$ であるから，f は全射である．一方，$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して，$f(n) = f(m)$ と仮定する．すると，$2n = 2m$ となるので，$n = m$ を得る．即ち，f は単射である．従って，f は全単射である．

注意 4.4 上の例を見ても分かるように，整数全体と偶数全体とは 1 対 1 に対応することが分かる．同様に，整数全体は奇数全体とも 1 対 1 に対応する．さらには，有理数全体とも 1 対 1 に対応することが知られている．

注意 4.5 有理数係数の多項式

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$$

の根，即ち，$f(z) = 0$ を満たすような複素数 z を $\mathbb{Q}$ 上の**代数的数**という．例えば，1, $1/2$, $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ などは全て代数的数である．一方で，円周率 π やネイピアの自然対数の底 e などは代数的数ではない．

$\mathbb{Q}$ 上の代数的数全体を $\overline{\mathbb{Q}}$ とおく．$\overline{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ の**代数閉包**という．$\overline{\mathbb{Q}}$ は，$\mathbb{C}$ の和と積により体になることが知られており，集合として $\mathbb{Z}$ と 1 対 1 に対応することが知られている．

2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S''$ に対して，$x'' = g(f(x))$ で定まる写像を f と g の**合成写像**といい，$g \circ f : S \to S''$ と表す．即ち，

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

である．一方，x に x を対応させることで決まる，S から S 自身への写像を S 上の**恒等写像**といい，$\mathrm{id}_S : S \to S$ または，$1_S : S \to S$ と表す．恒等写像は全単射であり，$1_S^{-1} = 1_S$ である．

以下の定理は，頻繁に用いられるものである．

定理 4.6 2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S''$ に対して，

(1) $g \circ f : S \to S''$ が単射であれば，f は単射．

(2) $g \circ f : S \to S''$ が全射であれば，g は全射．

この定理の系として次が得られる．

系 4.7 2 つの写像 $f : S \to S'$，$g : S' \to S$ に対して，$g \circ f = 1_S$ かつ，$f \circ g = 1_{S'}$ であれば f は全単射で，$g = f^{-1}$ である．

4.2　線型写像（一次写像）

さて，次にベクトル空間の間の写像を考えよう．ベクトル空間は単なる集合ではなく，和とスカラー倍が定義された集合であった．従って，それらの間の写像を考えるときは，これらの演算と両立するような,「特別な」写像を考えることが重要になる．

K を体とし，V，V' を K 上のベクトル空間とする．V から V' への写像 $f : V \to V'$ が 2 つの条件

(I) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

(II) 任意のスカラー $\alpha \in K$ 及び，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

を満たすとき，f を**線型写像**または，**一次写像**という．特に，V から自分自身への線型写像 $f : V \to V$ を V 上の**線型変換**または，**一次変換**という．

線型写像が単射かどうかを判定するために，以下の補題は有用である．

補題 4.8 $f : V \to V'$ を線型写像とする．このとき，

$$f \text{ が単射} \iff f(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ ならば } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

線型写像 $f : V \to V'$ が全単射であるとき，f は V から V' への**同型写像**という．また，このとき，V と V' は（ベクトル空間として）**同型**であるといい，$V \cong V'$ と表す．

補題 4.9 単射線型写像 $f : V \to V'$ に対して，$W = \mathrm{Im}(f)$ とおくと，f は V から W への同型写像とみなすことができる．このとき，f の逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も同型写像になることを示せ．

証明　f^{-1} が全単射であることは明らかゆえ，線型写像になることを示せばよい．そこで，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ をとるとき，

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) + f(f^{-1}(\boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

であり，f は単射であるから

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

を得る．同様に，任意の $\alpha \in K$ と，任意の $\boldsymbol{x} \in W$ に対して，

$$f(f^{-1}(\alpha\boldsymbol{x})) = \alpha\boldsymbol{x} = \alpha f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(\alpha f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

より，

$$f^{-1}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となるので，f^{-1} は線型写像である．□

上の補題からも分かるように，線型写像 $f : V \to V'$ が同型写像であれば，その逆写像 $f^{-1} : V' \to V$ も同型写像である．

V を体 K 上のベクトル空間とし，$\lambda \in K$ とする．V から V への写像 $S_\lambda : V \to V$ を

$$S_\lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in V$$

によって定義する．ベクトル空間の公理 5 及び，7 により，

$$S_\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y} = S_\lambda(\boldsymbol{x})+S_\lambda(\boldsymbol{y})$$
$$S_\lambda(\alpha\boldsymbol{x}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}) = (\lambda\alpha)\boldsymbol{x} = (\alpha\lambda)\boldsymbol{x} = \alpha(\lambda\boldsymbol{x}) = \alpha S_\lambda(\boldsymbol{x})$$

となるので，S_λ は V 上の線型変換である．特に，$\lambda \neq 0$ のとき，ベクトル空間の公理 7 及び，8 より，

$$S_\lambda \circ S_{\lambda^{-1}}(\boldsymbol{x}) = S_\lambda(\lambda^{-1}\boldsymbol{x}) = \lambda(\lambda^{-1}(\boldsymbol{x})) = (\lambda\lambda^{-1})\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$
$$S_{\lambda^{-1}} \circ S_\lambda(\boldsymbol{x}) = S_{\lambda^{-1}}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda^{-1}(\lambda(\boldsymbol{x})) = (\lambda^{-1}\lambda)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

なので，$S_\lambda \circ S_{\lambda^{-1}} = S_{\lambda^{-1}} \circ S_\lambda = 1_V$ であり，S_λ は同型写像である．

線型写像とベクトルの一次独立性とは次のような関係がある．

定理 4.10 V, V' を K 上のベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$ とする．また，$f : V \to V'$ を線型写像とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ が一次独立であれば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ も一次独立．

(2) f が単射であれば，(1) の逆も成り立つ．即ち，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であれば，$f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ も一次独立．

系 4.11 $f : V \to V'$ を同型写像とする．このとき，

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立 $\Longleftrightarrow$ $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ が一次独立

(2) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が V の基底 $\Longleftrightarrow$ $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ が V' の基底

が成り立つ．

注意 4.12 V, W をベクトル空間とし，$f : V \to W$ を線型写像，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．すると，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

である．即ち，**線型写像は基底の行き先を指定することで完全に決定される**．従って，2 つの線型写像 $f : V \to W$，$g : V \to W$ に対して，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の像が一致すれば，写像として f と g は一致である．即ち，

$$f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad f = g$$

となる．

また，次の事実は理論的にも重要である．

定理 4.13 V を体 K 上のベクトル空間とする．このとき，V の任意の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ に対して，写像 $f : K^m \to V$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{a}_m, \quad x_i \in K$$

で定めると，f は

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

となる唯一の線型写像である．ここで，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ は K^m の標準基底である．

さらに，上の線型写像 f について，

(1) f が単射 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立

(2) f が全射 $\Longleftrightarrow$ V の任意のベクトルが $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合で書ける

となる．特に，

$$f \text{ が同型写像} \Longleftrightarrow \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \text{ が } V \text{ の基底}$$

が成り立つ．このとき，$f^{-1} : V \to K^m$ は，$f^{-1}(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{e}_j$ となる同型写像である．

この定理より，有限個の基底を持つベクトル空間は，ベクトル空間としては数ベクトル空間と本質的に同じものであることが分かる．即ち，V を K 上のベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の基底とするとき，同型写像

$$f : K^m \to V; \quad f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

により，V と K^m を同一視できる．

補題 4.14 V をベクトル空間，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ を V のベクトルとし，各 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合であるとする．このとき，$m > n$ であれば，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ は一次従属である．

証明 各 $1 \leq i \leq m$ に対して，

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}\boldsymbol{a}_j$$

とする．$\phi : K^n \to V$ を $\phi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j$ で定まる線型写像とする．

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$

とおく．明らかに，$\phi(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{b}_i$ である．$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は K^n のベクトルであり，$m > n$ なので一次従属である．従って，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ も一次従属となる．□

定理 4.15 V をベクトル空間，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ をその基底の一つとする．また，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を V の一次独立なベクトルとする．このとき，

(1) $m \leq n$．即ち，基底の数より多くの一次独立なベクトルの組は存在しない．

(2) $m = n$ ならば，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底になる．

(3) $m < n$ であれば，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ の中から適当な $n - m$ 個のベクトル $\boldsymbol{u}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_{n-m}}$ をとることで

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{u}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{u}_{i_{n-m}}$$

が V の基底になるようにできる．

系 4.16 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ 及び，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ がともに V の基底であれば $m = n$ である．即ち，基底を構成するベクトルの数は常に一定である．

V の基底に含まれるベクトルの数を V の**次元**といい，$\dim_K V$ と表す．前後の文脈から体 K が明らかなときは，K を省略して $\dim V$ とも表す．

例 4.17 体 K 上の数ベクトル空間 K^n に対して，$\dim_K K^n = n$ である．

例 4.18 複素数体 $\mathbb{C}$ を通常の和と積に関して，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすとき，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ であり，$1, \sqrt{-1}$ が $\mathbb{C}$ の $\mathbb{R}$ 上の基底になる．より一般に，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$ となることが分かる．

最後に，線型写像全体の集合について考えよう．V, V' を体 K 上のベクトル空間とし，V から V' への線型写像全体の集合を

$$\mathrm{Hom}_K(V, V') := \{ f : V \to V' \mid f \text{ は線型写像} \}$$

と表す．このとき，$\mathrm{Hom}_K(V, V')$ に和とスカラー倍を以下で定める．

1. 和 $f,\ g \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ に対して，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in V$$

2. スカラー倍 $\alpha \in K,\ f \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ に対して，

$$(\alpha f)(\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in V$$

すると，$f+g$，αf はいずれも V から V' への線型写像であることが分かる．即ち，これらの演算に関して，$\mathrm{Hom}_K(V, V')$ は K 上のベクトル空間になる．特に，$V' = K$ の場合，$\mathrm{Hom}_K(V, K)$ を V の**双対空間**といい，V^* と表す.

$\mathrm{Hom}_K(V, V')$ の次元に関して，次のことが成り立つ.

定理 4.19 $V,\ V'$ を K 上のベクトル空間とする．このとき，

$$\dim(\mathrm{Hom}_K(V, V')) = (\dim V)\,(\dim V')$$

が成り立つ.

従って，特に，

$$\dim V^* = \dim V$$

である.

集合 A，B に対して，対 (a, b)，$a \in A,\ b \in B$ の全体の集合を A と B の**直積**といい，$A \times B$ で表す．即ち，

$$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A,\ \ b \in B\}$$

である．ベクトル空間 $V,\ V'$ に対して，$V \times V'$ は次の和とスカラー倍により，ベクトル空間になることが分かる.

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}') = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}'), \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in V,\ \ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in V'$$

$$\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}), \quad \boldsymbol{a} \in V,\ \ \boldsymbol{b} \in V'\ \alpha \in K$$

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ が V' の基底のとき，$V \times V'$ の $n+m$ 個のベクトル

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{0}), \ldots, (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}_1), \ldots, (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}_m)$$

は $V \times V'$ の基底になる．すなわち，次の定理を得る.

定理 4.20 $V,\ V'$ を体 K 上のベクトル空間とする．このとき，

$$\dim(V \times V') = \dim V + \dim V'$$

が成り立つ.

4.3 演習問題

問題 4.1 奇数全体の集合を

$$T = \{2n+1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$

とおく．$\mathbb{Z}$ と T の間の全単射を 1 つ構成せよ．

問題 4.2 $\mathbb{C}$ の部分集合

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\} \subset \mathbb{C}$$

を**上半平面**という．以下のような，一次の有理函数をメビウス変換という..

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \;\; ad - bc > 0.$$

(1) T は上半平面 $\mathfrak{H}$ からそれ自身への全単射になることを示せ．

(2) T を，以下のような 3 つのタイプのメビウス変換の合成として表せ．

$$\sigma(z) = \frac{1}{z}, \quad \tau_a(z) = az, \; (a \neq 0,\, 1), \quad \mu_b(z) = z + b, \; (b \neq 0)$$

問題 4.3 以下の写像が線型写像になることを示せ．

(1) $\mathbb{R}^2$ の点を，y 軸に関して対称な点に写す写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(2) $\mathbb{R}^2$ の点を，原点 O に関して反時計回りに 60 度回転させる写像 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(3) $\mathbb{C}$ の点に対して，偏角が同じで，原点からの距離が半分であるような点を対応させる写像 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

問題 4.4 写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3x + 2y + 2z \\ -2x + y \\ 2x + 5z \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) f は線型写像であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -19 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．$f(\boldsymbol{a}_i)$ を計算せよ．

(3) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

5 行列と線型写像

本講の目標

- **行列**の和，積を理解し，その扱いに慣れる．
- **線型写像の行列表示**を理解する．特に，ベクトル空間の基底をそれぞれ一つずつ選ぶことによって，線型写像と行列が 1 対 1 に対応することを理解する．

5.1 行列

体 K の元を，下のように，縦に m 個ずつ，横に n 個ずつ並べたものを (m,n) **行列**という．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

各 $1 \leq i \leq m$ に対して，

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

を行列 A の**第 i 行**という．（カンマ（,）は入れないことに注意する．）また，各 $1 \leq j \leq n$ に対して，

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

を行列 A の**第 j 列**という．さらに，第 i 行，第 j 列の要素 a_{ij} を行列 A の (i,j) **成分**という．上記の行列は $A = (a_{ij})$ と略記することがある．

一般に，(n,n) 行列は n **次正方行列**と呼ばれる．n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において，対角線上に並ぶ成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ を**対角成分**という．また，対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & O \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を**対角行列**という．

$(n,1)$ 行列は n **次元列ベクトル**，$(1,n)$ 行列は n **次元行ベクトル**と呼ばれる．(m,n) 行列全体の集合を $M(m,n,K)$ と表し，特に，n 次正方行列全体の集合 $M(n,n,K)$ は，$M_n(K)$ と略記されることがある．

さて，集合 $M(m,n,K)$ に和とスカラー倍を次のようにして定義する．

I. 和 $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M(m,n,K)$ に対して，

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$$

II. スカラー倍 $\alpha\in K,\ A=(a_{ij})\in M(m,n,K)$ に対して，

$$\alpha A=(\alpha a_{ij})$$

すべての成分が 0 である行列を**零行列**といい O と表す．このとき，$M(m,n,K)$ は上記の演算に関し，零行列を零元とする，K 上のベクトル空間になる．(各自確かめよ.)

(i,j) 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 であるような行列を**行列単位**といい，E_{ij} と表す．すると，任意の行列 $A=(a_{ij})\in M(m,n,K)$ は，行列単位の一次結合として以下のように一意的に表わされる．

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}E_{ij}$$

即ち，$M(m,n,K)$ **は行列単位たちを基底とするベクトル空間**となる．従って，

$$\dim M(m,n,K)=mn$$

を得る．

次に，行列の積について考えよう．(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ と，(n,l) 行列 $B=(b_{jk})$ に対して，A と B の積

$$AB=(c_{ik})$$

を

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

によって定義する．従って，AB は (m,l) 行列となる．

注意 5.1 行列 A と行列 B の積が定義されるのは，**A の列数と B の行数が等しいとき**に限ることに注意されたい．

行列の積については以下の性質がある．

1. 結合法則 $(AB)C=A(BC)$

2. 分配法則 $A(B+C)=AB+AC$

3．分配法則 $(A+B)C = AC + BC$

4． $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B), \quad \alpha \in K$

結合法則に関しては直接証明することもできるが，後述のように，行列を線型写像とみなすと理解が早い．実際，行列の積は写像の合成に対応しており，写像の結合法則から，直ちに導かれるのである．(5.2 節参照.)

実数や複素数の積の場合と著しく異なる行列の積の性質として，一般には

$$AB = BA$$

は**成り立たない**．例えば，$(2,2)$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，

$$AB = O, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

ここで，n 次正方行列の場合について考えよう．この場合，任意の $A, B \in M_n(K)$ に対して A と B の積 $AB \in M_n(K)$ が定義される．特に，行列 $A \in M_n(K)$ 及び，$k > 1$ に対して，A の k 個の積 $AA \cdots A$ を A^k と表す．また，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

によって定義される行列を**単位行列**といい，E_n もしくは単に E と表す．単位行列は次の性質を持つ．任意の (m,n) 行列 A に対して

$$E_m A = A E_n = A.$$

n 次正方行列 A に対して，

$$AX = XA = E_n \tag{2}$$

となる n 次正方行列 X が存在するとき，X を A の**逆行列**といい，A^{-1} と表す．また，逆行列が存在する行列 A を**正則行列**という．

注意 5.2 n 次正方行列 A に逆行列が存在すれば，それは一意的である．実際，$X, Y \in M_n(K)$ を (2) を満たす行列とするとき，

$$X = XE_n = X(AY) = (XA)Y = E_n Y = Y$$

となる．

5.2 線型写像の行列表示

この小節では線型写像と行列の関係について考えよう．まず最初に，行列が定める線型写像というものを考える．

K を体とし，(m,n) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M(m,n,K)$$

を考える．このとき，写像 $\phi_A : K^n \to K^m$ を，

$$\phi_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

によって定義する．すると ϕ_A は線型写像になる．特に，$m=n$ で，A が n 次単位行列 E_n のとき，ϕ_{E_n} は K^n 上の恒等写像である．

さて，線型写像 $f : K^n \to K^m$ が，

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

を満たすとする．このとき，$A=(a_{ij})$ とおけば $f=\phi_A$ である．定義から，

$$\phi_{(A+B)} = \phi_A + \phi_B, \quad \phi_{\alpha A} = \alpha\phi_A$$

は明らかである．さらに，対応 $A \mapsto \phi_A$ は全単射であり，同型写像

$$M(m,n,K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$$

を誘導する．

線型写像 $f : K^n \to K^m$，$g : K^l \to K^n$ がそれぞれ，(m,n) 行列 A と，(n,l) 行列 B により，$f=\phi_A$，$g=\phi_B$ であるとする．また，$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_l$ を K^l の標準基底，$\boldsymbol{e}'_1,\ldots,\boldsymbol{e}'_n$ を K^n の標準基底とする．すると，

$$\begin{aligned}(f\circ g)(\boldsymbol{e}_j) &= f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f\Big(\sum_{i=1}^n b_{ij}\boldsymbol{e}'_i\Big) = \sum_{i=1}^n b_{ij} f(\boldsymbol{e}'_i) \\ &= \sum_{i=1}^n b_{ij}\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ij} \end{pmatrix} = AB \text{ の第 } j \text{ 列}\end{aligned}$$

となるので，$\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$ となることが分かる．さらに，線型写像 $h : K^p \to K^l$ が (l, p) 行列 C により $h = \phi_C$ であるとすると，

$$\phi_{(AB)C} = (\phi_{AB}) \circ \phi_C = (\phi_A \circ \phi_B) \circ \phi_C = \phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C) = \phi_A \circ (\phi_{BC}) = \phi_{A(BC)}$$

であり，これより，行列の積に関する結合法則

$$(AB)C = A(BC)$$

が示すことが出来る．

次に，一般の線型写像について考えよう．まず，V, W をベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とし，固定しておく．

$$\dim(V) = n, \quad \dim(W) = m$$

である．線型写像 $f : V \to W$ に対して，$f(\boldsymbol{v_1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W のベクトルであるから，W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の一次結合として一意的に

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v_1}) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{12}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{1m}\boldsymbol{w}_m \\ f(\boldsymbol{v_2}) &= a_{21}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{2m}\boldsymbol{w}_m \\ \vdots \quad & \qquad \vdots \\ f(\boldsymbol{v_n}) &= a_{n1}\boldsymbol{w}_1 + a_{n2}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{w}_m \end{aligned}$$

と書ける．このとき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

とおく．(**行と列の関係に注意!**）すると，

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

となる．

$\boldsymbol{x}$ を V の任意のベクトルとし，成分ベクトルを $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ とする．即ち，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となっている．同様に，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ の成分ベクトルを $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ とすると，

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &= (f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となることが分かる．この行列 A を線型写像 f の**行列表示**といい，A_f などと表す.

注意 5.3 線型写像 $f : V \to W$ から上の方法で (m, n) 行列 A を構成する操作と，(m, n) 行列 A から線型写像 $\phi_A : V \to W$ を構成する操作は互いに逆の操作であり，従って，**線型写像 $f : V \to W$ と (m, n) 行列とは一対一に対応する**.

線型写像の合成と行列表示に関しては次のことが成り立つ.

定理 5.4 U, V, W をそれぞれ，n, m, l 次元のベクトル空間とし，各基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$, $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l\}$ をとって固定する．$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とし，上の基底に関する，線型写像 f, g, $g \circ f$ の行列表示をそれぞれ，A_f, A_g, $A_{g\circ f}$ とすると，

$$A_{g\circ f} = A_g A_f$$

が成り立つ.

証明 $\xi : K^n \to U$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_j$, $(1 \le j \le n)$ なる線型写像とし，$\mu : K^m \to V$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j$, $(1 \le j \le m)$ なる線型写像とする．このとき，ξ, μ は同型写像であり，

$$\mu^{-1} \circ f \circ \xi = \phi_{A_f}$$

となる．同様に，$\lambda : K^l \to W$ を $\lambda(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j$, $(1 \leq j \leq l)$ なる線型写像とすると，λ は同型写像であり，

$$\lambda^{-1} \circ g \circ \mu = \phi_{A_g}$$

となる．これらを図式で表せば以下のようになる．

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\phi_{A_f}"'] & U \arrow[d, "f"] \\ K^m & V \arrow[l, "\mu^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^m \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\phi_{A_g}"'] & V \arrow[d, "g"] \\ K^l & W \arrow[l, "\lambda^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

すると，

$$\begin{aligned} \phi_{A_g} \circ \phi_{A_f} &= (\lambda^{-1} \circ g \circ \mu) \circ (\mu^{-1} \circ f \circ \xi) = \lambda^{-1} \circ g \circ (\mu \circ \mu^{-1}) \circ f \circ \xi \\ &= \lambda^{-1} \circ (g \circ f) \circ \xi = \phi_{A_{g \circ f}} \end{aligned}$$

となるので，$A_g A_f = A_{g \circ f}$ である．□

系 5.5 U, V をともに n 次元のベクトル空間とし，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をそれぞれ，U, V の基底とする．このとき，$f : U \to V$ が同型写像であれば，A_f は正則行列であり，$f^{-1} : V \to U$ の，上の基底に関する行列表示は A_f^{-1} である．

線型写像の行列表示は，ベクトル空間の基底を固定するごとに定義されるものであった．では次に，基底の取り方を換えたときに行列表示がどのように換わるかを考察してみよう．

ベクトル空間 U の 2 つの基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$，$\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\}$ をとる．このとき，各 $\boldsymbol{u}'_j$ は $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ たちの一次結合として一意的に

$$\boldsymbol{u}'_j = p_{1j}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + p_{nj}\boldsymbol{u}_n$$

と表される．このとき，$P = (p_{ij})$ とおけば，

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P$$

となる．この P を**基底の変換行列**という．

注意 5.6 基底の変換行列は正則行列である．

このとき，次が成り立つ．

定理 5.7 $f : U \to V$ を線型写像とし，U の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と，V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する f の行列表示を A_f とする．一方，U の別の基底 $\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\}$ と，V の別の基底 $\{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m\}$ に関する f の行列表示を A'_f とする．さらに，以下のような基底の変換行列 P，Q を考える．

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P$$
$$(\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_m) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m)Q$$

このとき，

$$A'_f = Q^{-1} A_f P$$

が成り立つ．

証明 $\xi : K^n \to U$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}_j$, $(1 \leq j \leq n)$ なる線型写像とし，$\mu : K^m \to V$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j$, $(1 \leq j \leq m)$ なる線型写像とする．このとき，ξ, μ は同型写像であり，

$$\mu^{-1} \circ f \circ \xi = \phi_{A_f}$$

となる．同様に，$\xi' : K^n \to U$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{u}'_j$, $(1 \leq j \leq n)$ なる線型写像とし，$\mu' : K^m \to V$ を $\xi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}'_j$, $(1 \leq j \leq m)$ なる線型写像とすると，ξ', μ' は同型写像であり，

$$\mu'^{-1} \circ f \circ \xi' = \phi_{A'_f}$$

となる．よって，

$$f = \mu \circ \phi_{A_f} \circ \xi^{-1} = \mu' \circ \phi_{A'_f} \circ \xi'^{-1}$$

より，

$$\phi_{A'_f} = (\mu'^{-1} \circ \mu) \circ \phi_{A_f} \circ (\xi^{-1} \circ \xi')$$

を得る．

一方，$P = (p_{ij})$ とおくと，

$$\xi \circ \phi_P(\boldsymbol{e}_j) = \xi\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\xi(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}'_j = \xi'(\boldsymbol{e}_j)$$

であり，線型写像は基底の像で一意的に決まるので，$\xi \circ \phi_P = \xi'$ を得る．全く同様にして，$\mu' \circ \phi_{Q^{-1}} = \mu$ であることも分かる．従って，

$$\phi_{A'_f} = \phi_{Q^{-1}} \circ \phi_{A_f} \circ \phi_P = \phi_{Q^{-1}A_fP}$$

より，$A'_f = Q^{-1}A_fP$ を得る．□

これより，以下の系を得る．

系 5.8 n 次元ベクトル空間 V 上の線型変換 $f : V \to V$ を考える．V の 2 つの基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$，$\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n\}$ に関する f の行列表示をそれぞれ，A_f，A'_f とする．また，P を 2 つの基底の変換行列

$$(\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2, \ldots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n)P$$

をとる．このとき，

$$A'_f = P^{-1}A_fP$$

となる．

一般に，n 次正方行列 A，B に対して，n 次正則行列 P で，$A = P^{-1}BP$ となるものが存在するとき，A は B に**相似**であるという．また，B から $P^{-1}BP$ を作る操作を，B を P で**変換する**という．

5.3 演習問題

問題 5.1 以下の行列 A, B に対して，積 AB を計算せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$

問題 5.2 K を体とする．

(1) K の元を成分に持つ 2 次正方行列について

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (ad - bc)E_2$$

を示せ．さらに，$ad - bc \neq 0$ のとき，A は正則行列であることを示し，A^{-1} を求めよ．

(2) $K = \mathbb{R}$ とするとき，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

が正則行列かどうかを調べ，正則である場合は逆行列を求めよ．

(3) $K = \mathbb{C}$ とするとき，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

が正則行列かどうかを調べ，正則である場合は逆行列を求めよ．

問題 5.3 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $A^3 - 3A^2 + 3A = E_3$ が成り立つことを示せ.

(2) A は正則行列であるかどうかを調べ，正則であれば逆行列を求めよ.

問題 5.4 (1) 二次元ベクトル空間 $V = W = \mathbb{R}^2$ の間の線型写像 $f : V \to W$ を,

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2a - 3b \\ -a + 5b \end{pmatrix}$$

で定義する. V, W の標準基底たちに対して, f を行列表示せよ.

(2) (1) の f に対して, V の基底として標準基底を, 及び W の基底として

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

をとったとき，f を行列表示せよ.

(3) (1) の f に対して, V の基底を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

及び, W の基底を

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とするとき，f を行列表示せよ.

6 部分空間

本講の目標

- ベクトル空間の**部分空間**を理解し，その基底や次元を計算できるようになる．
- 線型写像の**像**と**核**がそれぞれ部分空間になることを理解する．
- **次元公式**を理解し，応用できるようになる．

6.1 部分空間

体 K 上のベクトル空間 V の部分集合 U が

(i) $\mathbf{0} \in U$

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \Longrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U$

(iii) $\boldsymbol{a} \in U$, $c \in K \Longrightarrow c\boldsymbol{a} \in U$

をみたすとき，U は V の**部分ベクトル空間**もしくは単に，**部分空間**であるという．即ち，ベクトル空間の部分集合であって，和とスカラー倍で閉じているものが部分空間である．特に，部分空間はそれ自身，ベクトル空間の公理を満たすので，体 K 上のベクトル空間になる．

注意 6.1 一般に，ベクトル空間 V が条件 $(*)$ を満たせば，V の任意の部分空間も $(*)$ を満たすことに注意する．

ベクトル空間の次元に関して，次は最も基本的な定理である．

定理 6.2 ベクトル空間 V とその部分空間 U に対して，$\dim U \leq \dim V$ が成り立つ．さらに，

$$\dim U = \dim V \Longleftrightarrow U = V$$

が成り立つ．

証明 $\Longleftarrow$ については自明である．$\Longrightarrow$ を示そう．$\dim U = \dim V$ とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を U の基底とする．$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は V の一次独立なベクトルであり，定理 4.15 の (2) より，V の基底になる．従って，$V \subset U$ であり，$U = V$ が得られる．□

ベクトル空間 V の部分集合 S に対して，

$$\langle S \rangle = \{\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_l \boldsymbol{x}_l \,|\, l \geq 1,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \in K, \quad \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l \in S\}$$

は V の部分空間になる．$\langle S\rangle$ は S を含む，V の最小の部分空間である．$\langle S\rangle$ を S が**生成する部分空間**，または S によって**張られた部分空間**という．S が有限集合

$$S=\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_l\}$$

のときは，$\langle S\rangle$ を $\langle \boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_l\rangle$ とも書く．

ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 U，W に対して，$U\cap W$ は V の部分空間であり，

$$U+W=\{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{x}\in U,\ \ \boldsymbol{y}\in W\}$$

は $U\cup W$ を含む最小の部分空間である．これを U と W の**和空間**もしくは，単に**和**という．

定理 6.3 V をベクトル空間，U，W を V の部分空間とする．このとき，

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

が成り立つ．

ベクトル空間 V の 2 つの部分空間 U，W に対して，

$$V=U+W,\quad U\cap W=\{0\}$$

のとき，V は U と W の**直和**であるいい，$V=U\oplus W$ と表す．このとき，

$$\dim V=\dim U+\dim W$$

である．直和に関しては次のことが成り立つ．

定理 6.4 V をベクトル空間，U，W をその部分空間とする．このとき，$V=U\oplus W$ となるための必要十分条件は，

任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，ある $\boldsymbol{x}_1\in U$ と $\boldsymbol{x}_2\in W$ が存在して，

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$$

と**一意的に**書き表わされることである．

6.2 線型写像の像と核

ここでは線型写像から定まる部分空間を考える．

補題 6.5 $f:V\to W$ を線型写像とするとき，$f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ が成り立つ．

証明　実際，

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$$

であるから，直ちに求める結果を得る．□

線型写像 $f : V \to W$ に対して，

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(\boldsymbol{x}) \in W \mid \boldsymbol{x} \in V\}$$

を f の**像**という．また，

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$$

を f の**核**という．f の像と核はそれぞれ，部分空間になる．即ち，

定理 6.6 線型写像 $f : V \to W$ に対して，

(i) $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である．

(ii) $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である．

証明　どちらも，部分空間となることを定義に従って示していけばよい．
(1) まず，$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathrm{Im}(f)$ である．次に，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ に対して，ある $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in V$ が存在して，

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}'), \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{y}')$$

となる．このとき，f が線型写像であることに注意して，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}') + f(\boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}') \in \mathrm{Im}(f)$$

となる．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$，及び $a \in R$ に対して，

$$a\boldsymbol{x} = af(\boldsymbol{x}') = f(a\boldsymbol{x}') \in \mathrm{Im}(f)$$

となる．従って，$\mathrm{Im}(f)$ は和とスカラー倍で閉じているので，W の部分空間である．
(2) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より，$\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．また，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

であるから，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathrm{Ker}(f)$ となる．一方，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$，及び $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(a\boldsymbol{x}) = af(\boldsymbol{x}) = a\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となるので，$a\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ である．従って，$\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である．□

次の補題はしばしば有用である．

補題 6.7 f を線型写像とするとき，

$$f \text{ は単射} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立つ.

補題 6.8 線型写像 $f : V \to V'$ に対して，W を V の部分空間とする．このとき，

$$\dim(W) \geq \dim(f(W))$$

が成り立つ．特に，f が単射のときは等号が成立する.

証明 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ を W の基底とする．$f(W)$ は $f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ で生成されるので，$\dim(f(W)) \leq m = \dim(W)$ となる．f が単射のときは，$f(\boldsymbol{a}_1), \ldots, f(\boldsymbol{a}_m)$ は一次独立であり，特に，$f(W)$ の基底になる．従って，$\dim(f(W)) = m = \dim(W)$．□

系 6.9 線型写像 $f : V \to V'$ に対して，

$$\dim(V) \geq \dim(f(V))$$

が成り立つ.

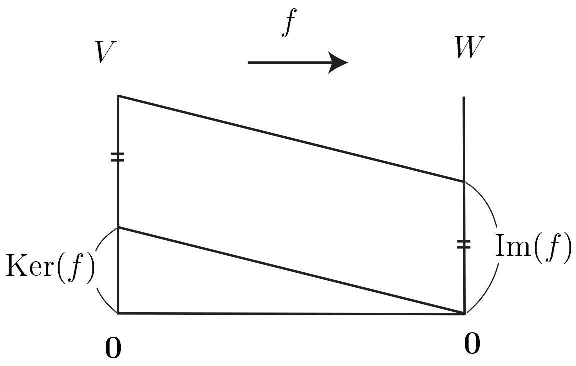
では，$\dim(\mathrm{Im}(f))$ は $\dim(V)$ に対してどのくらい小さくなるだろうか．これに対する答えとして，以下の最も重要な定理がある.

定理 6.10 (次元公式) 線型写像 $f : V \to W$ に対して，

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

が成り立つ.

この定理の主張をイメージで表すと下図のようになる.



例 6.11 線型写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$;

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=x+y$$

に対して，$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$ ゆえ，$\dim(\mathrm{Im}(f))=1$ である．従って，

$$\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$$

となる．このことは

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

が $\mathrm{Ker}(f)$ の基底になることからも分かる．

次元公式を用いて定理 6.3 を証明してみよう．V をベクトル空間とし，U, W を V の部分空間とする．線型写像 $\theta:U\times W\to V$ を

$$\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\in U,\ \boldsymbol{b}\in W$$

によって定める．一般に，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})$ なので，$\mathrm{Im}(\theta)=U+W$ である．一方，$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathrm{Ker}(\theta)\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ であるが，このとき，$\boldsymbol{a}\in U$，$\boldsymbol{b}\in W$ より，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\in U\cap W$．従って，

$$\mathrm{Ker}(\theta)=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\,|\,\boldsymbol{a}\in U\cap W\}$$

であり，$\mathrm{Ker}(\theta)$ と $U\cap W$ は対応 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\mapsto\boldsymbol{a}$ により同型である．よって次元公式から，

$$\begin{aligned}\dim(U+W)&=\dim(\mathrm{Im}(\theta))=\dim(U\times W)-\dim(\mathrm{Ker}(\theta))\\&=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)\end{aligned}$$

を得る．

線型写像 $f:V\to W$ に対して，$\mathrm{Im}(f)$ の次元を f の**階数**といい，$\mathrm{rank}\,f$ で表す．即ち，

$$\mathrm{rank}\,f=\dim(\mathrm{Im}(f))$$

である．このとき，以下が成り立つ．

補題 6.12 線型写像 $f : V \to W$ に対して，

(1) f が単射 $\iff \operatorname{rank} f = \dim V$

(2) f が全射 $\iff \operatorname{rank} f = \dim W$

が成り立つ．

特に，$\dim V = \dim W$ のとき，以下が成り立つ．

系 6.13 線型写像 $f : V \to W$ に対して，$\dim V = \dim W = n$ のとき，次は同値．

(1) f が単射

(2) f が全射

(3) f は同型写像

系 6.14 V を K 上の n 次元ベクトル空間とする．V の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ について，次は同値．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次独立．

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in V$ は $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の一次結合で書ける．

(3) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は V の基底である．

証明 $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{a}_i$, $(1 \leq i \leq n)$ となる線型写像 $f : K^n \to V$ を考える．今，$\dim K^n = \dim V = n$ であるので，(1), (2), (3) はそれぞれ，系 6.13 の (1), (2), (3) と同値である．ゆえに，系 6.14 が得られる．□

6.3 演習問題

問題 6.1 K を体とする．以下のベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間かどうかを調べ，部分空間であればその次元を求めよ．

(1) $K = \mathbb{R}$ とし，

$$V = \mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x + y = 1 \right\}.$$

(2) $K = \mathbb{R}$ とし，

$$V = \mathbb{R}^3 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z = 0 \right\}.$$

(3) $K = \mathbb{C}$ とし，

$$V = \mathbb{C}^3 \supset W = \{x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 \,|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ただし $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は $\mathbb{C}^3$ の標準基底とする．

問題 6.2 実数列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を S とおく．S において，以下の部分集合は部分空間であることを示し，その次元を求めよ．

$$W_1 = \{\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, a_{n+1} = 2a_n\},$$
$$W_2 = \{\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0\}$$

問題 6.3 以下で定義される線型写像 f の核と像の基底を求めよ．

(1)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a+3b+4c \\ 3a+9b+c \end{pmatrix}$$

(2)

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a+2b+3c \\ -a+3b+2c \\ a+2b+3c \end{pmatrix}$$

問題 6.4 以下のベクトル空間 V 及び，その部分空間 W_1, W_2 に対して，W_1+W_2，$W_1 \cap W_2$ の基底を求めよ．

(1) $V = \mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W_2 = \left\{ x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

(2) $V = M_n(\mathbb{R})$ の部分空間

$$W_1 = M_n(\mathbb{R}) \text{ の上三角行列全体} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, a_{ij} = 0, \quad i > j\},$$
$$W_2 = M_n(\mathbb{R}) \text{ の下三角行列全体} = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, a_{ij} = 0, \quad i < j\}$$

7　行列の基本変形

本講の目標

- 行列の**基本変形**を理解し，その扱いに慣れる．
- 基本変形を用いて，行列の**階数**を求める．
- 基本変形を用いて，与えられた行列が正則かどうかを判定し，正則であればその**逆行列**を求める．

7.1　行列の基本変形と階数

この小節では，与えられた行列をより簡単な行列に変形させる操作を考える．

(m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ に対して，A によって定まる線型写像 ϕ_A の階数を，行列 A の**階数**といい，rank$A$ と表す．即ち，

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\phi_A = \dim(\operatorname{Im}(\phi_A))$$

である．

注意 7.1 $A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ とするとき，

$$\operatorname{rank} A = \dim\langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\rangle$$

が成り立つ．

従って，次の定理を得る．

定理 7.2 行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ のうち，一次独立なものの最大個数が A の階数である．

また，次の定理は基本的である．

定理 7.3 A を (m,n) 行列とし，P，Q をそれぞれ，m 次，n 次の正則行列とする．このとき，

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} PAQ$$

が成り立つ．

さて次に，行列の基本変形について考えよう．一般に，行列について以下の 3 種類の変形を**行（列）基本変形**という．

(I) $c \in K$ に対して，第 j 行（第 i 列）を c 倍したものを第 i 行（第 j 列）に加える．

(II) 第 i 行（列）と第 j 行（列）を入れ換える．

(III) $0 \neq c \in K$ に対して，第 i 行（列）を c 倍する．

これらの操作を行列の言葉で言い表すと次のようになる．まず，以下の 3 種類の正方行列を**基本行列**という．

$$P(i,j;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E & O & \cdots & \cdots & O \\ O & 1 & & c & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & E \end{pmatrix} \end{array} = E + cE_{ij}, \quad i \neq j$$

$$Q(i,j) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E & O & \cdots & \cdots & O \\ O & 0 & & 1 & \vdots \\ \vdots & & E & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & O \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & E \end{pmatrix} \end{array}, \quad i \neq j$$

$$R(i;c) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & i & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} E & O & \cdots & O \\ O & c & & \vdots \\ \vdots & & E & O \\ O & & & E \end{pmatrix} \end{array}$$

このとき，以下を得る．

定理 7.4 基本行列は正則行列であり，逆行列も基本行列になる．

従って，**基本行列を掛けても与えられた行列の階数は変わらない**．さらに，

補題 7.5 行（列）基本変形 (I), (II), (III) はそれぞれ，m 次（n 次）の基本行列 $P(i,j;c)$, $Q(i,j)$, $R(i;c)$ を左（右）から掛けることと同値である．

各自，具体的な計算例を通して確認してほしい．

次に，基本変形を利用して行列の階数を求めることを考えよう．まず，行番号が増えるにつれて，左側に並ぶ 0 の数が増えていくような行列を**階段行列**という．即ち，

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{2j_2} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{rj_r} & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix} \end{array} \tag{3}$$

なる行列である．ここで，

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r, \quad a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \neq 0$$

である．

定理 7.6 上記の階段行列 A に対して，

$$\operatorname{rank} A = r$$

である．

任意の (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ は，行基本変形のみを行うことによって，階段行列に変形できる．その手順は以下の通りである．

手順 1 A の第 1 列の成分 $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ の中に 0 でないものがあるとき，その 1 つをとる．例えば，$a_{i1} \neq 0$ とする．このとき，A の第 1 行と第 i 行を入れ換える．この操作を考えることによって，初めから $a_{11} \neq 0$ であるとしてよい．

手順 2 各 $2 \leq i \leq m$ に対して，

$$\text{第}\,i\,\text{行} + \text{第}\,1\,\text{行} \times \frac{-a_{i1}}{a_{11}}$$

という行基本変形を行うことにより，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

の形に変形される．

手順 3 第 1 列の成分がすべて 0 である場合は，何も施さず，

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

のままにしておく．

手順 4 次に，上の行列 $*$ の部分に同様の操作を施す．この操作を繰り返すことによって，最終的に階段行列に到達できる．

上記の操作により，与えられた行列 A を階段行列に変形することによって，A の階数を求めることができる．

さらに，以下のような基本変形を行うことで，より簡単な行列に変形できる．

手順 5 階段行列 (3) に対して，さらに行基本変形を続けることにより，第 j_1列 $= \boldsymbol{e_1}, \ldots,$ 第 j_r列 $= \boldsymbol{e_r}$ となるように出来る．実際，r 行を $a_{rj_r}^{-1}$ 倍すると，(r, j_r) 成分を 1 にすることが出来る．さらに，$1 \leq i \leq r-1$ について，第 i 行に第 r 行の $-a_{ij_r}$ 倍を加えることで，第 j_r列 $= \boldsymbol{e_r}$．以下，この操作を 第 j_{r-1}列, …, 第 j_1列 と繰り返せばよい．

手順 6 手順 5 で得られた行列に対して，列基本変形（列の入れ換え）を施すことにより，

$$\begin{pmatrix} E_r & A' \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形に変形できる．ここで，$A' = (a'_{ij})$ とおく．

手順 7 最後に，$r \leq k \leq n$ について，第 k 列に第 1 列の $-a'_{1k}$ 倍，第 2 列の $-a'_{2k}$ 倍，…，第 r 列の $-a'_{rk}$ 倍を加えると，

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形に変形できる．

これより，次の定理を得る．

定理 7.7 (m, n) 行列 A に対して，$\mathrm{rank}\, A = r$ であるための必要十分条件は，ある m 次正則行列 P と，ある n 次正則行列 Q が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となることである．

特に，A を n 次正方行列で $\mathrm{rank}\, A = n$ とすると，**行による基本変形のみ**で A を E_n の形に変形することが出来る．即ち，ある n 次正則行列 P が存在して，$PA = E_n$ となる．このとき，

$$A = E_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}E_n = P^{-1}$$

となる．従って，

$$AP = P^{-1}P = E_n$$

であり，A は正則行列である．よって次を得る．

定理 7.8 A を n 次正方行列とするとき，

$$A \text{ が正則行列} \iff A \text{ は基本行列の積}$$

が成り立つ．

7.2　逆行列

この小節では，正則行列の逆行列の性質及び，求め方について考える．まず，逆行列の満たす最も基本的な性質として次のものがある．

定理 7.9 $A,\, B$ を n 次の正則行列とする．このとき，AB も正則行列であって，

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ．

注意 7.10

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \iff AB = BA$$

である．また，

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

となる．

次に，与えられた n 次正則行列 A の逆行列を具体的に計算する方法を述べる．以下の手順に従えば良い．

手順 1 A と n 次単位行列 E_n を並べてできる，$(n, 2n)$ 行列 (A, E_n) を考える．

手順 2 (A, E_n) に**行基本変形のみを施して**，(E_n, P) なる形にする．（具体的には，P を $PA = E_n$ となる基本行列の積とするとき，$P(A, E_n) = (PA, E_n) = (E_n, P)$ となる.）

手順 3 このとき，$P = A^{-1}$ である．

A が正則かどうか分らない場合には，やはり (A, E_n) を作り，手順2を試してみる．手順2のステップが途中で止まってしまう場合は $\mathrm{rank}\, A < n$ となり，A が正則でないことが分かる．

最後に，次元公式の別証明について考察してみよう．そのために，次の補題を準備する．

補題 7.11 $\mu : U \to U'$，$f : U' \to V'$，$\lambda : V' \to V$ を線型写像とし，$g = \lambda \circ f \circ \mu$ とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Im}(g) = \lambda(\mathrm{Im}(f \circ \mu))$ である．特に，μ が全射であれば，

$$\mathrm{Im}(f \circ \mu) = \mathrm{Im}(f)$$

であり，さらに λ が単射であれば,

$$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(\lambda \circ f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Im}(f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

が成り立つ．

(2) λ が単射のとき，$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f \circ \mu)$ である．

(3) $\mu(\mathrm{Ker}(f \circ \mu)) \subset \mathrm{Ker}(f)$ より，線型写像

$$\mu' : \mathrm{Ker}(f \circ \mu) \to \mathrm{Ker}(f)$$

が $\mu'(a) = \mu(a)$，$a \in \mathrm{Ker}(f \circ \mu)$ によって定めることができる．このとき，μ が全射であれば μ' も全射であり，μ が同型であれば μ' も同型となる．特に，μ が同型のとき，

$$\dim(\mathrm{Ker}(f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

となる．

証明 (3) 以外は明らかであるので (3) を示そう．まず，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}(f \circ \mu)$ であれば，$f(\mu(\boldsymbol{b})) = f \circ \mu(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$．よって，$\mu(\boldsymbol{b}) \in \mathrm{Ker}(f)$．$\mu$ が全射であれば，$\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}(f)$ に対して，$\mu(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ となる $\boldsymbol{b}$ が存在する．このとき,

$$f \circ \mu(\boldsymbol{b}) = f(\mu(\boldsymbol{b})) = f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$$

より，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Ker}(f \circ \mu)$ であり，$\mu(\mathrm{Ker}(f \circ \mu)) = \mathrm{Ker}(f)$ となる．□

定理 7.12 g を線型写像たちの合成 $g = \lambda \circ f \circ \mu$ で，λ 及び μ は同型写像とする．このとき，

$$\dim(\mathrm{Im}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)), \quad \dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

が成り立つ．

さて，次元公式の別証に入ろう．$f : V \to W$ を線型写像とするとき，

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

であることを示す．$\dim V = n$，$\dim V = m$ とする．このとき，ある同型写像

$$\mu : K^n \to V, \qquad \lambda : W \to K^m$$

が存在する．すると，

$$\dim(\mathrm{Im}(\lambda \circ f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Im}(\lambda \circ f)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$
$$\dim(\mathrm{Ker}(\lambda \circ f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Ker}(f \circ \mu)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$$

であるので，$V = K^n$ かつ，$W = K^m$ の場合に示せば良い．

そこで，このとき，$f : K^n \to K^m$ の標準基底に関する行列表示を A とする．即ち，$f = \phi_A$ とする．すると，ある m 次正則行列 P と，ある n 次正則行列 Q が存在して，

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = A'$$

となる．このとき，$\phi_P \circ \phi_A \circ \phi_Q = \phi_{A'}$ であり，ϕ_P，ϕ_Q は同型写像であるから，$f = \phi_{A'}$ の場合に示せば良いことが分かる．

このとき，

$$\dim(\mathrm{Im}(\phi_{A'})) = r = \operatorname{rank} A, \quad \mathrm{Ker}(\phi_{A'}) = \langle \boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$$

であるから，この場合は次元公式が正しいことが直ちに分かる．

7.3 転置行列

(m,n) 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，A の (i,j) 成分を (j,i) 成分とする (n,m) 行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ と表す．すると，

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB,$$
$${}^t(cA) = c\ {}^tA, \quad {}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA.$$

が成り立つ．ここで，$c \in K$ である．また，

(i) A が**対称行列** $\iff$ ${}^tA = A$

(ii) A が**交代行列** $\iff$ ${}^tA = -A$

と定める．

定理 7.13 n 次正方行列 A に対して，

$$A \text{ が正則} \iff {}^tA \text{ が正則}$$

であり，

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

が成り立つ．

ここで，$({}^tA)^{-1}$ を A の**反傾行列**という．

与えられた行列が正則行列かどうかを判定するには，以下のの定理を利用することもできる．

定理 7.14 A を n 次正方行列とするとき，以下は同値である．

(1) A は正則行列である．

(2) ある n 次正方行列 B で，$BA = E_n$ となるのもが存在する．(このとき，$B = A^{-1}$ である．)

(3) ある n 次正方行列 C で，$AC = E_n$ となるものが存在する．(このとき，$C = A^{-1}$ である．)

(4) 数ベクトル $\boldsymbol{a}$ で，$A\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$．即ち，$\mathrm{Ker}(\phi_A) = \{\boldsymbol{0}\}$．

(5) $(c_1 \cdots c_n)A = (0 \cdots 0)$ ならば，$(c_1 \cdots c_n) = (0 \cdots 0)$．

(6) A の n 個の行ベクトルたちは一次独立．

(7) A の n 個の列ベクトルたちは一次独立．

(8) $\mathrm{rank}\, A = n$.

(9) $\mathrm{rank}\, {}^tA = n$.

例えば，(8) $\iff$ (9) は，定理 7.7 を使う．

7.4 演習問題

問題 7.1 以下の行列 A に対して，基本変形を用いて

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形に変形し, A の階数を求めよ．また基本変形を用いる際に, どの段階でどの操作を用いたかも明記せよ. (例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{2}\text{ 行に }\textit{1}\text{ 行の }-3\text{ 倍を加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

という具合に.）

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 7.2 以下の行列 A, B に対して，行列の積 AB と BA を求めよ．またこれらの積が, 行列 A にどのような基本変形を施したものであるかを述べよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及び $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ 及び $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問題 7.3 $x \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ 及び，3 次正方行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

(2) 整数 $n \geq 2$ に対して, n 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．すなわち対角成分が 1 で, それ以外の成分が x であるような行列である．この A に対して $\mathrm{rank}(A)$ を求めよ.

問題 7.4 以下の正方行列 A に対して，行列の基本変形を用いて A が正則行列かどうかを調べ，正則であればその逆行列を求めよ.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

8　行列式

<u>本講の目標</u>

- 文字の**置換**と，**対称群**の概念を理解する．
- **行列式**の定義及び，性質を理解し，与えられた行列の行列式を計算する．
- **余因子展開**を用いた行列式の計算法を習得する．

8.1　置換と行列式の定義

n 個の文字 $1, 2, \ldots, n$ の集合を

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}$$

とおく．写像 $\sigma : X \to X$ が

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

を満たすとき，即ち，σ が全単射のとき，σ を X の**置換**という．X の置換とは，X の文字の並べ替えを表す写像である．明らかに，X の置換は全部で $n!$ 個ある．σ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とも表わされる．(これは**行列ではない**ことに注意されたい．) また，動かさない文字は省略してもよい．

例 8.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

X の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ で表す．任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，合成写像

$$\sigma \circ \tau : X \to X$$

はまた X の置換である．$\sigma \circ \tau$ は，X を τ に従って並べ替えたものを σ に従って並べ替える写像である．そこで，これを σ と τ の**積**といい，$\sigma\tau$ と表す．

一般に，集合 G の各元 $\sigma, \tau \in G$ に対して，積 $\sigma\tau \in G$ が定義されていて，以下の性質を満たすとき G は**群**であるという．

1. 結合法則 $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$

2. 単位元の存在 ある $x \in G$ が存在して，任意の元 $\sigma \in G$ に対して，

$$x\sigma = \sigma x = \sigma$$

となる．このとき，x を G の**単位元**といい，1_G もしくは単に 1 と表す.

3. 逆元の存在 任意の $\sigma \in G$ に対して，ある $y \in G$ が存在して，

$$\sigma y = y\sigma = 1$$

となる．このとき，y を σ の**逆元**といい，σ^{-1} と表す.

上の 1, 2, 3 を**群の公理**という.

例 8.2 $\mathbb{R}$ から 0 を除いた集合を $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とおく．すると，$\mathbb{R}^\times$ は通常の実数の積に関して群になる．$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ についても同様である.

上で定めた，$\mathfrak{S}_n$ の積は，写像の合成であるから明らかに結合法則を満たす．また，X のどの元も動かさない置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

のことを**恒等置換**といい，1_X と表す．すると，任意の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$1_X\sigma = \sigma 1_X = \sigma$$

となるのは明らかである．さらに，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，σ の逆写像 σ^{-1} も X の置換であり，$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_X$ を満たす．従って，以上のことから，$\mathfrak{S}_n$ は群になることが分かる．これを，n **次対称群**という.

以下の事実は有用である.

定理 8.3 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ \tau\sigma(1) & \tau\sigma(2) & \cdots & \tau\sigma(n) \end{pmatrix}$$

が成り立つ.

さて，一般に，群 G と G の部分集合 $S \subset G$ 及び，G の元 g に対して，

$$gS = \{gs \mid s \in S\}$$

$$Sg = \{sg \mid s \in S\}$$

$$S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$$

とおく．このとき，次が成り立つ.

定理 8.4 G を群，$g \in G$ とするとき，

(1) $gG = G$

(2) $Gg = G$

(3) $G^{-1} = G$

が成り立つ．

証明 (1) 写像 $l_g : G \to G$ を，

$$l_g(x) = gx, \quad x \in G$$

で定義する．すると，明らかに，$l_g \circ l_{g^{-1}} = l_{g^{-1}} \circ l_g = 1_G$ をみたすので，$l_{g^{-1}} = l_g^{-1}$ であり，特に，l_g は全単射である．従って，$gG = l_g(G) = G$ を得る．(2) についても，

$$r_g(x) = xg,\ x \in G$$

で定義される写像 $r_g : G \to G$ を考えることで示される．
(3) 写像 $\iota : G \to G$ を $\iota(x) = x^{-1}$ で定めると，$\iota \circ \iota = 1_G$ となるので，$\iota^{-1} = \iota$ であり，ι は全単射である．従って，$G^{-1} = \iota(G) = G$ となる． □

次に，対称群の各元に対して符号と呼ばれるものを定義しよう．まず，n 個の変数 $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ に対して，それらの多項式

$$D = D(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)$$

を，$X_1, \ldots, X_n$ の**差積**という．置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$\sigma D = D(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})$$

とおく．一般に，σD は，$X_1, \ldots, X_n$ のうち，異なる 2 つの変数の差全体の積になっているから，符号の違いを無視すれば，σD は D に等しい．即ち，

$$\sigma D = \pm D$$

となる．そこで，$\sigma D = D$ のとき，σ を**偶置換**といい，$\sigma D = -D$ のとき，σ を**奇置換**という．さらに，写像 $\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{が偶置換} \\ -1, & \sigma \text{が奇置換} \end{cases}$$

で定める．この sgn を**符号函数**または，単に**符号**という．定義から明らかに，

$$\sigma D = \mathrm{sgn}(\sigma) D$$

が成り立つ．また，符号が満たす重要な性質として以下のものがある．

定理 8.5 (1) $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\ \mathrm{sgn}(\tau)$$

(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

証明 (1) については，

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau)D = (\sigma\tau)D = \sigma(\tau D) = \sigma(\mathrm{sgn}(\tau)D) = \mathrm{sgn}(\tau)(\sigma D) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\sigma)D$$

より明らか．
(2) (1) より，$\mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(1_X) = 1$ であるので，これより直ちに得られる．□

さて，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ の中の相異なる m 個の文字 $a_1, \ldots, a_m$ に対して，

$$\sigma(b) = \begin{cases} a_{i+1}, & b = a_i,\ 1 \le i < m, \\ a_1, & b = a_m, \\ b, & b \ne a_i,\ 1 \le i \le m, \end{cases}$$

なる置換 σ が定義される．これを，$(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ と表す．この型の置換を，長さが m の**巡回置換**という．特に，長さが 2 の巡回置換を**互換**という．即ち，互換とはある 2 つの文字（i と j とする.）を入れ替えて，それ以外は動かさないような X の置換

$$\begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix}$$

のことである．

定理 8.6 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ において，

(1) 互換は奇置換である．

(2) 任意の置換は互換の積として表わされる．

証明 (1) まず，$\sigma = (1,2)$ の場合を考えよう．

$$D = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j) = (X_1 - X_2)D'$$

とすると，D と σD の因子において，符号が異なるものは $(X_1 - X_2)$ のみである．即ち，

$$\sigma D = (X_2 - X_1)D'$$

である．従って，$\sigma D = -D$ となり，$\mathrm{sgn}((1,2)) = -1$ となる．次に，任意の $\sigma = (i,j)$ に対して，$\tau = (1,i)(2,j)$ とすると，定理 8.3 より，

$$\sigma = \tau(1,2)\tau = \tau(1,2)\tau^{-1}$$

となる．ゆえに，

$$\mathrm{sgn}((i,j)) = \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}((1,2))\,\mathrm{sgn}(\tau^{-1}) = -1$$

を得る．

(2) n に関する帰納法による．$n = 2$ のときは，$\mathfrak{S}_2$ の元は $(1,2)$，$1_X = (1,2)(1,2)$ のみであるから正しい．$n > 2$ として，$\mathfrak{S}_{n-1}$ について主張は正しいとする．このとき，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ をとる．$\sigma(n) = n$ であれば，$\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ とみなせるので，帰納法の仮定から互換の積で書ける．$\sigma(n) \neq n$ とする．互換 $\tau = (n, \sigma(n))$ をとり，$\tau\sigma$ を考えると，$\tau\sigma(n) = \tau(\sigma(n)) = n$ となるので，帰納法の仮定から，$\tau\sigma$ は互換の積 $\tau_1\tau_2\cdots\tau_s$ として表わされる．このとき，$\sigma = \tau\tau_1\tau_2\cdots\tau_s$ を得る．□

系 8.7 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 σ に対して，σ が偶数個の互換の積で書ければ偶置換であり，奇数個の互換の積で書ければ奇置換である．

注意 8.8 一般に，任意の置換は有限個の互換の積で書かれる．しかしながら，与えられた置換を互換の積で書く方法は一般に一通りではない．例えば次のような例がある．

$$(1,3,2) = (1,2)(1,3) = (1,3)(2,3)$$

である．しかしながら，与えられた置換を互換の積として表示するとき，**各表示における互換の個数の偶奇は一致する**．

一般に，$\mathfrak{S}_n$ において，互換 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ の積を $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ とおくとき，

$$\sigma^{-1} = \tau_k\tau_{k-1}\cdots\tau_1$$

である．従って，$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を偶置換とするとき，σ^{-1} も偶置換となる．また，明らかに，$\mathfrak{S}_n$ の単位元 1_X は偶置換である．ゆえに，$\mathfrak{S}_n$ の偶置換全体の集合を $\mathfrak{A}_n$ とすれば，$\mathfrak{A}_n$ も群の公理を満たすことが分かる．これを，n **次交代群**という．

補題 8.9 n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ において，τ を互換の一つとする．このとき，全ての奇置換 ξ に対して，$\xi = \tau\sigma$ となる偶置換 σ が一意的に存在する．

証明 ξ を $\mathfrak{S}_n$ の奇置換とすると，$\sigma = \tau\xi$ は偶置換であり，$\tau\sigma = \tau^2\xi = \xi$．さらに，偶置換 σ に対して，$\xi = \tau\sigma$ とすると，$\sigma = \tau^2\sigma = \tau(\tau\sigma) = \tau\xi$ であるから，$\xi = \tau\sigma$ となる σ は一意的に決まることが分かる．□

ここで，巡回置換の符号について考えよう．

補題 8.10 $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in \mathfrak{S}_n$ を長さが m の巡回置換とする．このとき，

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-1}$$

が成り立つ．

証明 σ は互換の積として，

$$\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_m) = (a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_{m-1}, a_m)$$

と表される．よって，補題が成り立つ．□

以上の準備の下，行列式を定義しよう．n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

を A の**行列式**といい，$\det(A)$, $|A|$ などと表す．ここで，和は X の置換すべてを渡るものとする．定義から以下を得る．

定理 8.11 n 次正方行列 A に対して，

$$|{}^tA| = |A|$$

が成り立つ．

例 8.12 2 次，3 次正方行列の行列式は次のようになる．

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

上において，3 次の場合を**サラスの公式**という．

8.2 行列式の性質

$M_n(K)$ を K 成分の n 次正方行列の全体の集合とし，以下の性質を満たすような写像 $F : M_n(K) \to K$ を考える.（実は，行列式もこのような性質を満たす．即ち，行列式は以下で考える写像 F の特別な場合と見なせる.）

(1) $(n-1)$ 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in K^n$ を固定するとき, 写像 $F_i : K^n \to K$ が

$$F_i(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n),\ \boldsymbol{x} \in K^n$$

によって定まる．全ての $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して F_i が線型写像となるとき，F は第 i 列について**線型**であるという.

(2) $1 \leq i < j \leq n$ が存在して, $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ ならば

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$$

であるとき, F は**交代的**であるという.

$F : M_n(K) \to K$ がすべての i 列 $(1 \leq i \leq n)$ について線型かつ交代的であるとする. このとき, $A \in M_n(K)$ の第 i 列と第 j 列 $(i < j)$ を入れ替えた行列 A' に対して,

(2)’ $F(A') = -F(A)$

が成立する．証明は同じなので, $i = 1$, $j = 2$ のときに限って示す.

$$\begin{aligned}
0 &= F(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) \\
&= F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) + F(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) \\
&= F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots) + F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) + F(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots) + F(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) \\
&= F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) + F(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots).
\end{aligned}$$

ここで上の式変形においては, 一行目から二行目では 1 列目に関しての, 二行目から三行目では 2 列目に関しての線型性を用いている． また三行目から四行目では, 交代性 $F(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots) = F(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots) = 0$ を用いている． 従って, $F(A') = -F(A)$ を得る.

体の標数についての知識がある方は，次のことにも注意されたい.

注意 8.13 体 K の標数が 2 でないときは，$(2)' \Longrightarrow (2)$ も言える．実際，各 $i < j$ に対して，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ ならば，$A = A'$ かつ，$F(A) = -F(A)$ であるから，$2F(A) = 0$ となる．K の標数は 2 でないから，K に 2 の逆元 $\frac{1}{2}$ が存在する．従って，両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けることにより，$F(A) = 0$ を得る.

以下, F はすべての列について線型であり, かつ交代的であるとする. このとき, 以下が成立する.

(i) $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) \in M_n(K)$, $i \neq j$ とする. このとき,

$$F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_i + \lambda \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = F(A), \quad \forall \lambda \in K.$$

(ii)

$$F(\lambda A) = \lambda^n F(A) \quad \lambda \in K.$$

(iii) $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が一次従属ならば, $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$. 特に, ある列について $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ ならば, $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$.

以下で, 上の (i), (ii), (iii) を証明する.

(i) 与式の左辺は

$$F(A) + \lambda F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

である. ところが, $i \neq j$ より $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ は第 i 列と第 j 列が等しいので, F が交代的であることから $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n) = 0$ となり, (i) の主張を得る.

(ii) 列についての線型性を, 各列について n 回行えばよい. 一般に, $F(\lambda A) = \lambda F(A)$ **ではないことに注意**する.

(iii) 対称性より, $\boldsymbol{a}_n$ が他の列の一次結合として

$$\boldsymbol{a}_n = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1}$$

とかけている場合を考えればよい. $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると,

$$F(A) = F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \alpha_1 \boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha_{n-1} \boldsymbol{a}_{n-1})$$

である. ここで

$$F(A) = \alpha_1 F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_1) + \cdots + \alpha_{n-1} F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_{n-1})$$

を得る. $1 \leq j \leq n-1$ について, $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_j)$ は第 j 列と第 n 列が等しいので, F の交代性より $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_j) = 0$. よって (iii) の主張を得る.

定理 8.14 写像 $F : M_n(K) \to K$ で,

(1) 全ての列について線型.

(2) 交代的.

(3) $F(E_n) = 1$

を満たすものが一意的に存在する．特に $F(A) = |A|$ は，この性質を満たす.

ここでは，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $|A|$ が上の (1), (2), (3) を満たすことを示してみよう．そこで，τ を $\mathfrak{S}_n$ の互換とすると，補題 8.9 より，

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \left(a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} - a_{1,\tau\sigma(1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} \right)$$

である.

今，$A(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ について，$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$, $(i \neq j)$ とする．即ち，$a_{ki} = a_{kj}$, $(1 \leq k \leq n)$ となっている．このとき，$\tau = (i, j)$ として上式を考える．各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，$\sigma(\alpha) = i$, $\sigma(\beta) = j$ とする．すると，$\alpha \neq \beta$ であり，$k \notin \{\alpha, \beta\}$ のとき，$\sigma(k) \notin \{i, j\}$ である．特に，

- $k = \alpha$ のとき，$a_{k\tau\sigma(k)} = a_{k\tau(i)} = a_{kj} = a_{ki} = a_{k\sigma(k)}$
- $k = \beta$ のとき，$a_{k\tau\sigma(k)} = a_{k\tau(j)} = a_{ki} = a_{kj} = a_{k\sigma(k)}$
- $k \notin \{\alpha, \beta\}$ のとき，$a_{k\tau\sigma(k)} = a_{k\sigma(k)}$

となる．よって上の $|A|$ の式から，$|A| = 0$ であることが分かる．即ち，$|A|$ は交代的である.

$|A|$ が各列について線型であること，及び，$|E_n| = 1$ であることは定義から明らかである.

注意 8.15 従って，行列式 $|A|$ は上の (i), (ii), (iii) の性質を満たすことに注意する．とくに，行列 A の第 i 列に第 j 列のスカラー倍を加えた行列の行列式は，$|A|$ に一致する.

定理 8.16 写像 $F : M_n(K) \to K$ がすべての列について線型かつ交代的とする．このとき，

$$F(A) = F(E_n)|A|, \quad \forall A \in M_n(K)$$

である.

証明　$n = 2$ の場合を考えてみよう.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とする.

$$\boldsymbol{a}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2$$

なので,

$$F(A) = a_{11}a_{12}F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + a_{11}a_{22}F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + a_{21}a_{12}F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + a_{21}a_{22}F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$$

であるが，交代性により,

$$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{0}, \quad F(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$$

となっている．従って,

$$F(A) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})F(E_2) = |A|F(E_2)$$

が成立する．$n \geq 3$ の場合も同様である．□

定理 8.16 の応用：　$A \in M_n(K)$ を固定して, $F(X) = |AX|$ とおく $(X \in M_n(K))$.

$$A(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = (A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

なので, $F : M_n(K) \to K$ はすべての列について線型かつ交代的である．従って, $F(X) = F(E_n)|X|$ であるが $F(E_n) = |AE_n| = |A|$ であり, $F(X) = |A||X|$ が得られる．従って，次の重要な定理を得る.

定理 8.17 A, B が n 次正方行列のとき, $|AB| = |A||B|$.

さらに，次のことが分かる.

定理 8.18 $A \in M_n(K)$ が正則行列 $\iff$ $|A| \neq 0$.

証明　A が正則であれば,

$$1 = |E_n| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$$

なので，$|A| \neq 0$. 逆に，$|A| \neq 0$ とすると，$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ が正則でなければ，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は一次従属であり，上の (iii) より $|A| = 0$ となり矛盾．よって，A は正則行列である．□

定理 8.19 $A \in M_n(K)$, $B \in M_m(K)$, C は (n,m) 行列とする.

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|.$$

証明. 写像 $F : M_n(K) \to K$ を

$$F(X) = \begin{vmatrix} X & C \\ O & B \end{vmatrix}$$

で定める. F はすべての列について線型かつ交代的であるから,

$$F(X) = |X|F(E_n)$$

である. また

$$F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & C \\ O & B \end{vmatrix}$$

である. ここで, 注意 8.15 により,

$$F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & B \end{vmatrix}$$

である. ここで, $G : M_m(K) \to K$ を,

$$G(Y) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & Y \end{vmatrix}$$

で定める. G もすべての列について線型でかつ交代的なので, $G(Y) = |Y|G(E_m)$. ところが, $G(E_m) = |E_{n+m}| = 1$ なので, $G(Y) = |Y|$ となる. 即ち,

$$\begin{vmatrix} E_n & O \\ O & B \end{vmatrix} = G(B) = |B|$$

となり, 定理が得られる. □

系 8.20

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & a_{22} & * & * \\ O & & \ddots & * \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

8.3 余因子展開と行列式の計算法

行列式を計算する際に，定義どおりに計算することは極めて稀である．実際は余因子展開を用いた行列式の計算が有効である．以下これを紹介する．

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ から，その第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる，$(n-1)$ 次の正方行列を $A_{\langle ij\rangle}$ とかく．即ち，

$$A_{\langle ij\rangle}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

である．さらに，

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{\langle ij\rangle}|$$

とおき，A の (i,j) **余因子**という．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 8.21 n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，

(i) $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}|A|, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

(ii) $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}$

が成り立つ．

証明 (i) A の第 1 列を $a_{i1}\boldsymbol{e}_i$ に置き換えた行列の行列式について，

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{\langle i1\rangle} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$
$$=(-1)^{i-1}a_{i1}|A_{\langle i1\rangle}|=a_{i1}A_{i1}$$

であることに注意する．今，$A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ とおくと，$\boldsymbol{a}_1=a_{11}\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n$ であるので，

$$|A|=a_{11}A_{11}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

となる．次に，$j \geq 2$ として A の第 1 列を第 j 列で置き換えてできる行列を A' とする．すると，各 $1 \leq i \leq n$ に対して，$A'_{\langle i1 \rangle} = A_{\langle i1 \rangle}$ であり，$A_{i1} = A'_{i1}$ である．A' の第 1 列 $= A$ の第 j 列であることに注意して上の結果を用いると，

$$0 = |A'| = a_{1j}A_{11} + a_{2j}A_{21} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

を得る．さらに，

$$|\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = (-1)^{j-1}|\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$$

を用いると他の場合も示すことができる．
(ii) (i) を ${}^tA$ に対して適用させればよい．□

この定理の (i) の $i = j$ の場合を**第 i 行に沿った余因子展開**といい，(ii) の $i = j$ の場合を**第 j 列に沿った余因子展開**という．

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，(i, j) 成分が A の (j, i) 余因子 A_{ji} となる行列

$$\widetilde{A} = (A_{ji})$$

を A の**余因子行列**という．定理 8.21 より，以下を得る．

定理 8.22 n 次正方行列 A に対して，

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|E_n$$

が成り立つ．特に，$|A| \neq 0$ のとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

となる．

余因子展開は，行列式の計算上有用だが，実際の計算においては直接適用させるのではなく，以下のような操作を用いて行列を簡単なものに変形させておいてから用いるのが有効である．

定理 8.23 $A = (a_{ij})$ を n 次正方行列とする．

(i) A の一つの列（または行）を c 倍すると行列式は c 倍になる．即ち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ca_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ca_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\,|A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\,|A|$$

(ii) A の二つの列（または行）を入れ替えると行列式は -1 倍になる．即ち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

(iii) A の一つの列（または行）を c 倍して，他の列（または行）に加えても行列式の値は変わらない．即ち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ca_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + ca_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ca_{j1} & \cdots & a_{in} + ca_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

注意 8.24 A を n 次正方行列とする．

(i) A の一つの列（または行）の成分がすべて 0 であれば $|A| = 0$.

(ii) A のある列（または行）が，別の列（または行）のスカラー倍ならば，$|A| = 0$.

行列式を計算するときのコツ

余因子展開を用いて行列式を計算しようとするとき，余因子展開の性質から，どの行またはどの列に関して展開を行っても行列式を計算できる．従って，計算量を少なくするには，なるべく**成分に 0 が多い行または列**に適用させるのがよい．また，成分に 0 を持つような行（または列）がないときは，行列の基本変形（特に定理 8.23 の (i) と (iii)）を用いて**どれかの行（または列）を一つの成分が 1 で残りが 0 となるように変形してしまう**と，その後の計算が楽である．

与えられた行列の形によっては，特殊な工夫をすると素早く計算できたりすることもあるので，上記の操作がすべての場合において計算を簡略するための最善の方法というわけではないが，大抵の場合においては有効である．

例 8.25 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

の行列式を計算せよ．

解答 A に以下のような行基本変形

(1) 2 行目に 1 行目を足す.

(2) 3 行目に 1 行目の -2 倍を足す.

(3) 3 行目に 2 行目の 1 倍を足す.

を行った行列を A' とすると，

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．従って，$|A| = |A'| = 8$ を得る．□

8.4 小行列式と階数

$A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を K 係数 (m, n) 行列，$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を K^n の基本ベクトル，$\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_m$ を K^m の基本ベクトルとする．t 個の行番号 $i_1, \ldots, i_t$ 及び，s 個の列番号 $j_1, \ldots, j_s$ を選び，

$$E(j_1, \ldots, j_s) = (\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{j_s}), \quad E'(i_1, \ldots, i_t) = (\boldsymbol{e}'_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}'_{i_t})$$

とおく．すると，$AE(j_1, \ldots, j_s) = (\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_s})$ であり，

$${}^tE'(i_1, \ldots, i_t)AE(j_1, \ldots, j_s) = \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_t,j_1} & \cdots & a_{i_t,j_s} \end{pmatrix}$$

となる．即ち，これは A から $i_1, \ldots, i_t$ 行及び，$j_1, \ldots, j_s$ 列を抜き出して作った行列である．特に，$t = s = r$ のとき，r 次正方行列

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix}$$

の行列式を A の r 次の**小行列式**といい，便宜上

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

と表す.

このとき，以下のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank} A = r &\iff \text{ある } 1 \le j_1 < \cdots < j_r \le n \text{ が存在して,} \\
&\qquad \operatorname{rank} AE(j_1, \ldots, j_r) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_{j_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_r}) = r \\
&\iff \operatorname{rank} {}^t(AE(j_1, \ldots, j_r)) = r \\
&\iff \text{ある } 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m \text{ が存在して,} \\
&\qquad \operatorname{rank} ({}^tE(j_1, \ldots, j_r)\ {}^tA\ E'(i_1, \ldots, i_r)) = r \\
&\iff \operatorname{rank} {}^tE'(i_1, \ldots, i_r) AE(j_1, \ldots, j_r) = r \\
&\iff r \text{ 次正方行列} \\
&\qquad\qquad \begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_r} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_r,j_1} & \cdots & a_{i_r,j_r} \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{が正則行列} \\
&\iff A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \neq 0
\end{aligned}$$

特に，ある $1 \le i_1 < \cdots < i_s \le m$, $1 \le j_1 < \cdots < j_s \le n$ に対して,

$$\begin{pmatrix} a_{i_1,j_1} & \cdots & a_{i_1,j_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_s,j_1} & \cdots & a_{i_s,j_s} \end{pmatrix} = {}^tE(j_1, \ldots, j_s)\ {}^tA\ E'(i_1, \ldots, i_s)$$

が正則行列であれば,

$$s = \operatorname{rank} {}^tE(j_1, \ldots, j_s)\ {}^tA\ E'(i_1, \ldots, i_s) \le \operatorname{rank} A = r$$

が成り立つ.

8.5 演習問題

問題 8.1 (1) 以下の対称群の元 σ_1, σ_2 について, その逆元を求めよ.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 以下の対称群の元 σ_1, σ_2 を互換の積であらわし, その符号を求めよ.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

問題 8.2 以下の行列 A の行列式 $\det A$ を求めよ．

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}2&12&-1\\0&8&-7\\0&0&5\end{pmatrix}\qquad (2)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}\qquad (3)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&1&4\\-2&3&-1&-2\\0&-9&0&4\\0&0&3&-7\end{pmatrix}$$

問題 8.3 (1) $A^n=O$ $(n\geq 1)$ が成り立っているなら, $\det A=0$ となることを示せ．

(2) A を, 整数を成分とする n 次正方行列とする．もし逆行列 A^{-1} が存在してその成分がすべて整数ならば, $\det A=\pm 1$ となることを示せ．

(3) (2) の逆を示せ．すなわち整数を成分とする n 次正方行列 A が $\det A=\pm 1$ を満たしていたら, 逆行列 A^{-1} が存在してその成分がすべて整数となることを示せ．

9 連立一次方程式

<u>**本講の目標**</u>

- 行列の基本変形を利用して，連立斉一次方程式の**基本解**を求める．
- 連立斉一次方程式の解法を利用して，一般の連立一次方程式の**一般解**を求める．

9.1 連立斉一次方程式の解法

K を体とする．(分かりにくい場合は，$K=\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ と思ってよい.）まず，K 係数連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 & \cdots ① \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0 & \cdots ② \\ \qquad\qquad\vdots & \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 & \cdots Ⓜ \end{cases} \tag{4}$$

を解くことを考えよう．このような形の連立一次方程式を**連立斉一次方程式**という．

今，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

とおくと，連立一次方程式 (4) は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

と表わされる．

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解全体の集合を

$$W(A)=\{\boldsymbol{x}\in K^n \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

とおくと，$W(A)=\mathrm{Ker}\,\phi_A$ であり，$W(A)$ は K^n の部分空間となる．これを $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**解空間**という．また，解空間の基底を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の**基本解**という.（一般に，基本解は無数にあることに注意せよ.）特に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は常に $A\boldsymbol{x}=0$ の解であり，**自明な解**という．

以下の定理は解空間の次元を計算する上で重要である．

定理 9.1 (i) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明でない解を持つ．$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が一次従属である．

(ii) $\dim W(A)=\dim(\mathrm{Ker}\phi_A)=n-\dim(\mathrm{Im}\phi_A)=n-\mathrm{rank}A$

次に，方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を具体的に解くこと，即ち，基本解を求めることを考えよう．まず，(4) について次の変形をしても解の集合は変わらないことに注意する．

(I) ⓚ を ⓚ $+ \alpha$ⓛ, $(k \neq l)$ で置き換える．

(II) 式の順序を変える．

(III) ⓚ の両辺を $\alpha \neq 0$ 倍する．

（中学校で習った連立方程式の解法を思い出してほしい．）すると，これらの変形はそれぞれ，行列 A に

(I)' (k 行) が，(k 行) $+\alpha$ (l 行) になる．

(II)' 行の順序を変える．

(III)' k 行を $\alpha \neq 0$ 倍する．

という行基本変形を施すことに対応している．

そこで，行基本変形により A が階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n)$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\
\vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\
O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O
\end{pmatrix}
\end{array}$$

の形に変形されたとする．このとき，さらに行基本変形を行い，j_r 列，j_{r-1} 列，$\ldots$, j_1 列をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを A' とする．ここで，各 $\boldsymbol{e}_i$ たちは K^m の基本ベクトルを表す．

Case 1 $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ となる場合．このとき A' は

$$\begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形をしている．そこで，$(n, n-r)$ 行列

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

に対して，

$$\begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = O$$

であり，$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix} = n - r$ なので，$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ の $n-r$ 個の列ベクトルが $W(A)$ の基底になることが分かる．これが求める基本解である．

Case 2　一般の場合．$j_1, \ldots, j_r$ の残りの列番号を小さい方から順に $k_1, \ldots, k_{n-r}$ とし，n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_{n-r}})$ を考える．すると，

$$A'P = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

である．このとき，

$$\boldsymbol{x} \in W(A'P) \Longleftrightarrow (A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow A'(P\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow P\boldsymbol{x} \in W(A')$$

であるから，Case 2 の場合は次のようにすればよい．即ち，Case 1 の方法で $(A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求め，それらを $\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n-r}$ をとするとき，$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ が求める $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解である．

実際，$\boldsymbol{x}' \in W(A'P)$ のとき，$A'(P\boldsymbol{x}') = (A'P)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$ であるから，$P\boldsymbol{x}' \in W(A')$ となる．P は正則行列であるので，全ての $\boldsymbol{x} \in W(A')$ に対して，$P\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ となる $\boldsymbol{x}' \in K^n$ が存在する．$A'(P\boldsymbol{x}') = A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{x}' \in W(A'P)$．従って，$W(A')$ の各元は $P\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}' \in W(A'P)$ の形をしている．よって，$\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n-r}$ が $(A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解（$W(A'P)$ の基底）のとき，$W(A')$ の各元は $P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ の一次結合であり，$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ は一次独立であるから $W(A')$ の基底となる．つまり，$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ は $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解である．

もう少し理論的に言うと，n 次正則行列 P に対して，ϕ_P は同型写像である．よって，

$$W(A'P) = \operatorname{Ker}(\phi_{A'P}) = \operatorname{Ker}(\phi_{A'} \circ \phi_P), \quad W(A') = \operatorname{Ker}(\phi_{A'})$$

であるから，ϕ_P は同型写像 $\phi'_P : W(A'P) \to W(A')$ を定める．また，$\phi'_P(\boldsymbol{x}) = \phi_P(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ である．従って，$(A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解（$W(A'P)$ の基底）が $\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n-r}$ のとき，$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$ は $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解（$W(A')$ の基底）である．

上述の議論が分かりにくい場合は次のように考えてもよい．一般に A が (m, n) 行列で，$\operatorname{rank} A = r$ なるものとする．すると，$\dim W(A) = n - r$ であり，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ とするとき，$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r})$ とおく．X は $(n, n-r)$ 行列で，$\operatorname{rank} X = n - r$，$AX = O$ を満たす．逆に，$\operatorname{rank} X = n - r$ であるような $(n, n-r)$ 行列 X

で，$AX = O$ を満たすものがあれば，X の $n-r$ 個の列ベクトルが $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解になる．これを踏まえると，次のことが分かる．Q が m 次，P が n 次正則行列で，$QAP = \tilde{A}$ なるものとする．$\tilde{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ とし，$X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r})$ とおく．すると，

$$O = \tilde{A}X = Q^{-1}\tilde{A}X = Q^{-1}\tilde{A}(P^{-1}P)X = (Q^{-1}\tilde{A}P^{-1})(PX)$$

が成り立つ．今，$A = Q^{-1}\tilde{A}P^{-1}$ であるから，$A(PX) = O$ となる．ここで，P は n 次正則行列であったから，$\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} X = n-r$ である．ゆえに，上の注意から PX の $n-r$ 個の列ベクトルが $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解となる．

この議論を Case 2 の場合に適用させてみよう．階段行列 A' に対して，$\{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ の元を小さい順に並べたものを $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-r}$ とし，n 次正方行列 P を

$$P = (\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_{n-r}})$$

で定める．すると P は正則で，

$$A'P = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

である．従って，ある m 次正則行列 Q が存在して，$QA = A'$，$QAP = \tilde{A}$ となっている．$(n, n-r)$ 行列 $\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ の nr 個の列ベクトルは $\tilde{A} = \mathbf{0}$ の基本解を与えることから，$P\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$ の $n-r$ 個の列ベクトルは $A = \mathbf{0}$ の基本解を与えることが分かる．

以上により，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ が求まった．従って，その一般解は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in K$$

で与えられる．

例 9.2 連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & = 0 \end{cases}$$

の基本解を求めてみよう．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．A に行基本変形を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．従って，$r=1$, $A''=-1$ となっている．よって，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-A''\\E_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

が求める基本解である．

例 9.3 連立斉一次方程式

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3 &=0\\2x_1+2x_2+2x_3 &=0\end{cases}$$

の基本解を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$$

とする．A に行基本変形を施すと，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

となる．従って，$r=1$, $A''=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$ となっている．よって，

$$\begin{pmatrix}-A''\\E_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

となり，

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

が求める基本解である．

注意 9.4 行列 A に対して，$\mathrm{Ker}(A)$ の基底を求めることと，連立方程式系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の基本解を求めることは本質的に同じことである．

注意 9.5 基本解とは解空間の基底の一組のことで，一つの解という意味ではない．**解空間の次元が 1 次元である場合**には，基本解を与えることと非自明な解を一つ与えることは本質的に同値であるが，これはあくまでも特殊な場合であることに注意されたい．

注意 9.6 基本解を求める際に，出てきた答えが解空間の次元と合っていないような答案がしばしば見受けられる．解答を書き終えた後は必ず，**次元の確認**，及び**検算**を忘れないようにしてほしい．

9.2 連立一次方程式の解法（一般の場合）

各 $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ に対して a_{ij}, $b_i \in K$ とするとき，一般の連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & \cdots ② \\ \qquad\qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & \cdots ⓜ \end{cases} \tag{5}$$

を解くことを考えよう．斉一次方程式の場合と同様に，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと，連立一次方程式 (5) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表わされる．この連立一次方程式を解くために，次の $(m, n+1)$ 行列

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

を考える．$(A, \boldsymbol{b})$ を方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**拡大係数行列**という．

さて，斉一次方程式の場合と同様に，(5) に (I), (II), (III) の変形を施しても解の集合は変わらない．この操作は，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ に行基本変形を施すことに対応している．

そこで，行基本変形により $(A, \boldsymbol{b})$ が階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n+1)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix} \end{array}$$

の形に変形されたとする．

Case 1　$j_r = n+1$ となる場合．このとき対応する r 番目の方程式は

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

となり，これは矛盾．従って，(5) は**解を持たない**．

Case 2　$j_r \leq n$ の場合．このとき，行に関する基本変形を続けて，j_r 列，j_{r-1} 列，...，j_1 列をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを $(A', \boldsymbol{b}')$ とおく．ここで，$\boldsymbol{b}'$ は第 $n+1$ 列ベクトルを表し，

$$\boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を

$$x_j = \begin{cases} b'_k, & \text{ある } k \text{ が存在して } j = j_k,\ (1 \leq k \leq r), \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{6}$$

で定めると，$A'\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}'$ であり，(5) に解が存在する．

実際，これは次のように考えても分かる．今，$r \leq n$ なので，$\widehat{\boldsymbol{b}'} \in K^n$ を

$$\widehat{\boldsymbol{b}'} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定めると，$j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ のときは，

$$A'\widehat{\boldsymbol{b}'} = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}'$$

なので，$\boldsymbol{x}_0 = \widehat{\boldsymbol{b}'}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である．一般の場合は，斉次方程式の解法のときに用いた n 次正則行列 P で

$$A'P = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

なるものを用いると，

$$A'(P\widehat{\boldsymbol{b}'}) = (A'P)\widehat{\boldsymbol{b}'} = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}\widehat{\boldsymbol{b}'} = \boldsymbol{b}'$$

となるので，$\boldsymbol{x}_0 = P\widehat{\boldsymbol{b}'}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である．このとき，(6) で定めた x_j, $(1 \le j \le n)$ に対して，

$$P\widehat{\boldsymbol{b}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

となっている．

従って，次の定理が得られる．

定理 9.7

$$(5) \text{ に解が存在する} \iff j_r \le n \iff \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(A, \boldsymbol{b})$$

このことは，

$$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(\phi_A) \iff \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \iff \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(A, \boldsymbol{b})$$

からも分かる．

さて，$\boldsymbol{x}'$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解とすると，

$$A(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x}' - A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

であるから，

$$\boldsymbol{x}' \text{が } (5) \text{ の解} \iff \boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}_0 \in W(A)$$

となる．ゆえに，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ とするとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in K$$

で与えられる．

このうように，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，対応する連立斉一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を利用して求めることができることが分かる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に**同伴する斉次方程式**という．また，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一つの解 $\boldsymbol{x}_0$ を取り上げたとき，これを $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の**特殊解**という．

例題 9.8 体 K の元を係数とする 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して，次の問いに答えよ．

(1) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を一組求めよ．

(2) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解け．

解答 (1) A は行基本変形により

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に変形される．ゆえに，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の 1 つの基本解となる．

(2) まず，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解を 1 つ見つける．そのために $(A, \boldsymbol{b})$ を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

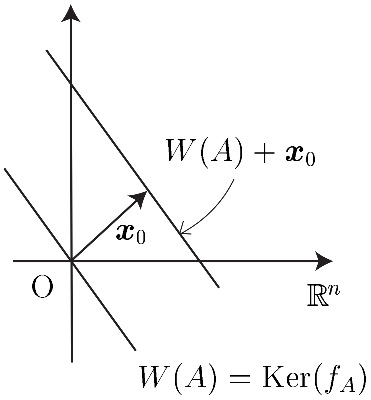
とおくと，$\boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解となる．よって，(1) の結果より，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

と書ける．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解集合の幾何学的な形

上述の結果より，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は，一つの特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ と，同伴する斉次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の和で表される．これは，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解集合である $\mathbb{R}^n$ の部分空間 $W(A)$ を，特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ の分だけ平行移動したものであることを意味している．



9.3　Cramer の公式

連立一次方程式 (5) において，$n=m$ かつ A が正則（$|A|\neq 0$）な場合を考えよう．A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}\boldsymbol{b}.$$

ここで，A_j を A の j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列とし，$|A_j|$ の j 列についての展開を考えると

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad x_j=\frac{|A_j|}{|A|}$$

が得られる．これを Cramer の公式という．一般に，計算の煩雑さから，この公式を実際の方程式を解くのに使うことは稀で，飽くまで理論的な公式である．

9.4　部分空間の基底と次元

連立方程式の基本解を求める方法を利用して，ベクトル空間の部分空間の基底と次元を求めてみよう．といっても，することは本質的に基本解を求める操作と同じである．以下，K を体とする．

例題 9.9　K^3 の部分空間

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1=x_2=x_3\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\,\middle|\,x_1=x_2+x_3\right\}$$

の基底と次元を求めよ．

解答　V は連立斉一次方程式

$$\begin{cases}x_1-x_2 &=0\\ x_1-x_3 &=0\end{cases}$$

の解空間である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおいて，A に行基本変形を施すと，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$r = 2$, $A'' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -A'' \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．従って，$\boldsymbol{x}_1$ が V の基底で，$\dim(V) = 1$ を得る．

　一方，W は（連立）斉一次方程式

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

の解空間である．そこで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおくと，$r = 1$, $A'' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．従って，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が W の基底で，$\dim(W) = 2$．　□

例題 9.10 線型写像 $f : K^2 \to K^3$, $g : K^3 \to K^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ x - y \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + z \\ -x + y \\ x + y + z \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，$\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(g)$ の基底と次元を求めよ．

解答　$\mathrm{Ker}(f)$ は連立斉一次方程式

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ x &= 0 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

の解空間である．そこで,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とおいて，A に行基本変形を施すと,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$r = 2$ となり，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 - 2 = 0$．即ち，$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ である．

$\mathrm{Ker}(g)$ は連立斉一次方程式

$$\begin{cases} 2x + z & = 0 \\ -x + y & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}$$

の解空間である．そこで,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいて，A に行基本変形を施すと,

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$r = 2$，$A'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ より,

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -A'' \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める基本解である．従って，$\boldsymbol{x}_1$ が $\mathrm{Ker}(g)$ の基底で，$\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$ を得る．□

9.5 いろいろな概念と連立一次方程式

K を体とし，数ベクトル空間 $V = K^n$ のベクトル,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

を考える．また，(n, m) 行列 $A = (a_{ij})$ 及び,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = & b_n \end{cases} \tag{7}$$

なる連立方程式を考える．以下，よく使う事実を連立方程式の言葉で言い換えたものを表にまとめておくので適宜活用して欲しい．

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次独立	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (7) が自明な解しか持たない．
$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属	$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (7) が非自明な解を持つ．
$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の一次結合	連立方程式 (7) が解を持つ．
$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が基底	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (7) はただ一つの解を持つ．
$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$	$(x_1, \ldots, x_m)$ が，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合の連立方程式 (7) の解．
$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(f_A)$	連立方程式 (7) が解を持つ．
$\mathrm{rank}\, A = m$（f_A は単射）	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (7) の解は高々1個．
$\mathrm{rank}\, A = n$（f_A は全射）	任意の $\boldsymbol{b}$ に対して連立方程式 (7) が解を持つ．

9.6 演習問題

問題 9.1 以下の各連立一次方程式の基本解を一組求めよ．また解空間の次元を計算せよ．

$$(1)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \end{cases}$$

問題 9.2 以下の各連立一次方程式の一般解を求めよ．

$$(1)\ \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x + 4y - 7z + w &= 1 \\ 2x + y - z + 2w &= 1 \\ -7y + 13z &= -1 \\ 3x - 2y + 5z + 3w &= 1 \end{cases}$$

問題 9.3 A, B を n 次正方行列とする．

(1) A の階数が $n-1$ のとき, その余因子行列 $\tilde{A}$ の階数は 1 であることを示せ．

(2) $\tilde{A}$ の一行目を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

とあらわす．$a_{11} \neq 0$ のとき, 連立一次方程式

$$\tilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の基本解を求めよ．（ただし (1) は用いてよい.）

(3) B の階数が $n-2$ 以下のとき, その余因子行列 $\tilde{B}$ の階数は 0 になることを示せ．

10 参考例題その1

例題 10.1 $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は一次独立であることを示せ.

解答 実数の組 x, y, z に対して，$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ が成り立つとする．すると，これは連立方程式

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = 0 \qquad \cdots\cdots ① \\ x + 4y & = 0 \qquad \cdots\cdots ② \\ x + 6y - z & = 0 \qquad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を考えることと同値である．② を用いて，① 及び，③ から x を消去すると，

$$\begin{cases} -10y + z & = 0 \qquad \cdots\cdots ①' \\ 2y - z & = 0 \qquad \cdots\cdots ③' \end{cases}$$

となる．①$'$ + ③$'$ より，$-8y = 0$ となるので，$y = 0$．これを ①$'$ に代入して，$z = 0$ を得る．従って，② より，$x = 0$ となる．即ち，上の連立方程式は自明な解 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ しか持たない．ゆえに，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立である．□

例題 10.2 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$ は，複素数の和及び積を考えることで体になることを示せ.

解答 まず，$0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に注意する．次に，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ は四則演算で閉じていることを示そう．そこで，任意の $x = a + b\sqrt{-1}$, $y = c + d\sqrt{-1}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ に対して，

$$x + y, \quad xy, \quad -x \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$$

であることは明らか．よって，$x \neq 0$ のとき，$x^{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ であることを示せばよい．すると，

$$x = 0 \iff a = b = 0$$

であるから，

$$x \neq 0 \implies a^2 + b^2 > 0.$$

よって，$x \neq 0$ のとき，

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{|x|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$$

を得る．

以上より，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ は 0 と 1 を持ち，四則演算で閉じていることがわかった．一方，体の公理である，交換法則，結合法則，分配法則などは，複素数体 $\mathbb{C}$ で既に成立しているので，四則演算に関して閉じている $\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ で成立することは明らか．ゆえに，$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ は体である．□

例題 10.3 次数が 1 次以下の $\mathbb{R}$ 係数多項式全体の集合を

$$S = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$$

とおく．$\mathbb{R}[x]$ における和とスカラー倍を用いて，S に和とスカラー倍を導入する．即ち，

- $(a + bx) + (a' + b'x) = (a + a') + (b + b')x$
- $\alpha(a + bx) = \alpha a + \alpha bx, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

とする．
(1) 上記の和とスカラー倍に関して，S は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることを示せ.
(2) $1, x$ は S の基底であることを示せ.

解答 (1) S の結合法則，交換法則，分配法則などは，$\mathbb{R}[x]$ のそれらから自然に導かれる．S の零元は，多項式としての零

$$\mathbf{0} = 0 + 0x \in S$$

であり，任意の S の元 $f = a + bx$ に対して，f のマイナス元は

$$-f = (-a) + (-b)x \in S$$

である．これらの零元，マイナス元に対して S がベクトル空間の公理を満たすことは明らか.
(2) まず，$1, x$ が一次独立であることを示そう．$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$a1 + bx = \mathbf{0}$ とする．すると，多項式の相等より，$a = b = 0$ であるから，$1, x$ は一次独立であることが分かる．一方，S の任意の元 f は $a + bx$ なる形に書けるので，$1, x$ が S を生成することも明らか．ゆえに，$1, x$ は S の基底である．□

例題 10.4 a を実数とするとき，写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = ax$ は全射か単射か理由をつけて答えよ.

解答　(1) $a \neq 0$ のとき．まず，単射性について考えよう．$x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = f(y)$ と仮定する．すると，$ax = ay$ となるが，$a \neq 0$ ゆえ，両辺に a^{-1} を掛けると，$x = y$ となる．従って，f は単射．次に全射性について考えよう．任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$y = a^{-1}x \in \mathbb{R}$ なる元を考えると，$f(y) = x$ となる．ゆえに，f は全射となる．よって，f は全単射である．ちなみに，逆写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，$g(x) = a^{-1}x$ である．
(2) $a = 0$ のとき．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x) = 0$ となるので，明らかに全射でも単射でもない．□

例題 10.5 以下の写像は線型写像かどうか，理由をつけて答えよ．

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x$.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ g(x) = x + 1$.

解答　(1) f が線型写像であること，即ち，和とスカラー倍を保つことを示そう．和については，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = f(x) + f(y)$$

となるので良い．スカラー倍についても，任意の $x \in \mathbb{R}$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha f(x)$$

となるので明らか．従って，f は線型写像である．
(2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$g(x + y) = (x + y) + 1 = x + y + 1$$

となるが，これは一般に，$g(x) + g(y)$ と等しくない．実際，

$$g(0) + g(1) = 1 + 2 = 3 \neq 2 = g(0 + 1)$$

である．ゆえに，g は線型写像ではない．□

例題 10.6

以下の対応が写像かどうか調べよ．また，写像であれば線型写像かを調べよ．
(1) $\mathbb{R}^2$ の各点 P に対して，P を直線 $y = x + 1$ に関して折り返した点を対応させる対応．
(2) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ たる対応．

解答 (1) 点 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を直線 $y = x + 1$ に関して折り返した点とする．すると，これら 2 つの点を結んだ線分は $y = x+1$ に直交し，かつ中点 $\begin{pmatrix} \frac{a+x}{2} \\ \frac{b+y}{2} \end{pmatrix}$ が直線 $y = x+1$ 上にあることから，

$$y - b = -(x - a), \quad \frac{b+y}{2} = \frac{a+x}{2} + 1$$

なる関係式を得る．これを x, y について解くと，$x = b - 1, y = a + 1$ となる．即ち，直線 $y = x + 1$ に関して折り返す対応を f とすると，

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b-1 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

となる．よってこの対応は (a, b) を決めれば一通りに定まるので, 写像である．

また, この対応で原点は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写るが，一般に，線型写像は零ベクトルを零ベクトルに写さなければならないので，これは線型写像ではない.

(2) 写像であることは明らか. また，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ となるが，一般的にこれは $a^2 + b^2$ に一致しないので，この対応は線型写像ではない．□

例題 10.7 線型写像の合成は, 線型写像であることを示せ.

解答 $f : V \to W,\ g : W \to U$ をともに線型写像とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V,\ a \in K$ に対して,

$$\begin{aligned}
g \circ f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= g(f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) \quad (\text{合成写像の定義}) \\
&= g(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) \quad (f\ \text{の線型性}) \\
&= g(f(\boldsymbol{x})) + g(f(\boldsymbol{y})) \quad (g\ \text{の線型性}) \\
&= g \circ f(\boldsymbol{x}) + g \circ f(\boldsymbol{y}) \quad (\text{合成写像の定義}) \\
a(g \circ f)(\boldsymbol{x}) &= a(g(f(\boldsymbol{x}))) \quad (\text{合成写像の定義}) \\
&= g(af(\boldsymbol{x})) \quad (g\ \text{の線型性}) \\
&= g(f(a\boldsymbol{x})) \quad (f\ \text{の線型性}) \\
&= g \circ f(a\boldsymbol{x}) \quad (\text{合成写像の定義})
\end{aligned}$$

より, 合成 $g \circ f$ は V から U への線型写像である. □

例題 10.8

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a + b + 3c \\ a - b + c \\ a + 2b + 2c \end{pmatrix}$$

で定義される線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は, 全射でも単射でもないことを示せ.

解答 (i) f が単射でないこと．$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \mathbf{0}$ とすると，

$$\begin{cases} 2a+b+3c &= 0 \quad \cdots ① \\ a-b+c &= 0 \quad \cdots ② \\ a+2b+2c &= 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

なる連立方程式を得る．① = ② + ③ であり，④ = ② − ③ とすると，上の連立方程式は

$$\begin{cases} a-b+c &= 0 \quad \cdots ② \\ 3b+c &= 0 \quad \cdots ④ \end{cases}$$

と同値．従って，例えば $c=-3$ とすると，$b=1, a=4$ となる．即ち，

$$f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ であるので f は単射ではない.

(ii) f が全射でないこと．$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{cases} 2a+b+3c &= x \quad \cdots ① \\ a-b+c &= y \quad \cdots ② \\ a+2b+2c &= z \quad \cdots ③ \end{cases}$$

なる連立方程式を得る．② + ③ を考えることにより，$x=y+z$ でなければならないことが分かる．従って，$x \neq y+z$ であるような x, y, z の組に対して $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ は f の像には含まれない．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

などは, $f(\boldsymbol{x})$ の形では表せない. よって f は全射でない. □

例題 10.9 実係数 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) 各自然数 $n \geq 1$ に対して, A^n を求めよ.

(2) $\mathbb{R}$ 成分の 2 次正方行列全体のなすベクトル空間 $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間

$$V = \{xE_2 + yA \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

を考える．また，$\mathbb{C}$ を $1, \sqrt{-1}$ を基底とする，$\mathbb{R}$ 上の 2 次元ベクトル空間とみなす．このとき，線型写像 $f : \mathbb{C} \to V$ を,

$$f(a + b\sqrt{-1}) = aE_2 + bA$$

で定義する．すると, f は積を保つことを示せ．即ち，任意の複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$$

が成り立つことを示せ.

解答　(1) A^4 まで具体的に計算すると,

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．特に，$A^4 = E_2$ であるから，任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$A^{4k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A^{4k+2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A^{4k+3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{4k+4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる.

(2)　任意の $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(a + b\sqrt{-1}) \cdot f(c + d\sqrt{-1}) &= (aE_2 + bA)(cE_2 + dA) \\ &= (ac - bd)E_2 + (ad + bc)A. \\ f((a + b\sqrt{-1}) \cdot (c + d\sqrt{-1})) &= f((ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}) \\ &= (ac - bd)E_2 + (ad + bc)A. \end{aligned}$$

となるので f は積を保つ．$\square$

注意　委細はふれないが, この f によって $\mathbb{C}$ と V は体として同一視することができる．即ち，$\mathbb{C}$ と V は体として同型である．もし虚数単位 $\sqrt{-1}$ というものの存在がよくわからない, 現実味がなさすぎる, あるいは存在することが信じられないという人は, この同一視を通して V を $\mathbb{C}$ と思ってもよい．つまり行列 A が虚数単位 $\sqrt{-1}$ の役割を担うことができるのである.

例題 10.10 体 K の元を係数とする 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\ Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) QP, PQ を求めよ.

(2) QAP を求めよ.

(3) (1) と (2) を利用して, 各自然数 $n \geq 1$ に対して，A^n を計算せよ.

解答. (1) 計算より, $PQ = QP = E_2$ となる. つまり Q は P の逆行列 $Q = P^{-1}$ である.

(2) 同様に，$QAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる.

(3) $(QAP)^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ であるので,

$$A^n = P(QAP)^nP^{-1}$$

となる．一方,

$$(QAP)^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるので，これを（頑張って）計算すれば,

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} & 4^{n-1} \\ 4^n & 2 \cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}$$

を得る. □

例題 10.11 (1) $V = W = \mathbb{R}^2$ に対して，$f : V \to W$ を

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$

で定義する. この線型写像を, $\mathbb{R}^2$ の標準基底たちに対して行列表示せよ.

(2) (1) の f に対して,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を V, W の基底としたときに，f を行列表示せよ.

解答 (1)

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より,

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

が表現行列となる.

(2)

$$f(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}_2,\ f(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1$$

より,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$$

が表現行列となる. □

例題 10.12 (1) $V = W = \mathbb{R}^2$ とし, $f : V \to W$ を

$$f(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2a-3b\\-a+4b\end{pmatrix}$$

で定義する. この線型写像を, $\mathbb{R}^2$ の標準基底たちに対して行列表示せよ.

(2) (1) の f に対して,

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

を V, W の基底としたときに f を行列表示せよ.

(3) 各自然数 n に対して,

$$f^n(a\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}} + b\boldsymbol{v}_2) = x\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{1}} + y\boldsymbol{v}_2$$

とおくとき, x, y を a, b 用いて表せ.

解答 (1)

$$f(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$$

より,

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\-1 & 4\end{pmatrix}$$

が表現行列となる.

(2)

$$f(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_1,\ f(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix} = 5\boldsymbol{v}_2$$

より,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2)) = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

が表現行列となる.

(3) (2) より, $f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1$, $f(\boldsymbol{v}_2) = 5\boldsymbol{v}_2$ である. $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して,

$$f^n(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + 5^n b\boldsymbol{v}_2$$

となることを数学的帰納法で示す. $n = 1$ のときは (2) より明らか. $n \geq 2$ とするとき, 帰納法の仮定により,

$$\begin{aligned} f^n(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) &= f(f^{n-1}(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2)) = f(a\boldsymbol{v}_1 + 5^{n-1}b\boldsymbol{v}_2) \\ &= af(\boldsymbol{v}_1) + 5^{n-1}bf(\boldsymbol{v}_2) = a\boldsymbol{v}_1 + 5^n b\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

となり, 帰納法が進むことが分かる. □

例題 10.13 体 K の元を係数とする n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $M_n(K)$ を考える. 以下の各部分集合 W について, それらが $M_n(K)$ の部分空間でないことを示せ.

(1) $W = \{A \in M_n(K) \mid A^2 = E_n\}$

(2) $W = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ は正則行列}\}$

(3) $W = \{A \in M_n(K) \mid \text{ある } B \neq O \text{ が存在して } AB = O\}$

解答 (1) $E_n \in W$ であるが, $2E_n \notin W$ であるので, W は部分空間ではない.

(2) $E_n \in W$ であるが, $O = E_n - E_n \notin W$ となるので, W は部分空間ではない.

(3) $1 \leq i \leq n$ に対して, (i, i) 成分が 1 で, 他の成分がすべて 0 であるような行列を D_i とおく. すると, $i \neq j$ のとき, $D_iD_j = O$ である. 従って, $D_i \in W$. そこで, もし W が部分空間であるとすると,

$$E_n = D_1 + D_2 + \cdots + D_n \in W$$

となる. ところが, $B \neq O$ なる任意の $B \in M_n(K)$ に対して, $E_nB = B \neq O$ であるからこれは矛盾である. 従って, W は部分空間ではない. □

例題 10.14 実係数 n 次正方行列全体のなすベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ を考える.

(1) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ であって, $a_{ji} = a_{ij}$, $(1 \leq i, j \leq n)$ を満たすものを対称行列という. n 次対称行列全体からなる $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合を $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ とおく. $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$

の部分空間であることを示せ．
(2) $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ であって，$a_{ji} = -a_{ij}$, $(1 \leq i, j \leq n)$ を満たすものを交代行列という．n 次交代行列全体からなる $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合を $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ とおく．$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．
(3) $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ 及び，$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ の次元を求めよ．

解答 (1) 明らかに，$O \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$．また，各 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ に対して，$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ であり，$a_{ji} + b_{ji} = a_{ij} + b_{ij}$ であるから，$A + B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$．同様に，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\alpha A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$．よって，$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は部分空間である．
(2) (1) と全く同様である．
(3) 各 $1 \leq i, j \leq n$ に対して，(i, j) 成分が 1 で，それ以外は 0 であるような行列を E_{ij} とおく．E_{ii}, $(1 \leq i \leq n)$ 及び，$E_{ij} + E_{ji}$, $(1 \leq i < j \leq n)$ は一次独立であり，全て $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ に属する．さらに，任意の $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ に対して，

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} + E_{ji})$$

と書ける．即ち，

$$\{E_{ii} \,|\, 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}$$

は $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ の基底になる．ゆえに，$\dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) = n(n+1)/2$.

一方，$E_{ij} - E_{ji}$, $(1 \leq i < j \leq n)$ たちは一次独立であり，これらはすべて $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ に属する．また，任意の $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ に対して，$a_{ii} = -a_{ii}$ であるから，$a_{ii} = 0$ である．ゆえに，

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(E_{ij} - E_{ji})$$

と書ける．従って，

$$\{E_{ij} - E_{ji} \,|\, 1 \leq i < j \leq n\}$$

は $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ の基底である．ゆえに，$\dim(\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})) = n(n-1)/2$. □

例題 10.15 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a + c \\ 2a - b + c \\ 3a - 2b + c \end{pmatrix}$$

で定義される線型写像とする．このとき，f の核と像の基底と次元を求めよ．

解答

まず，f の像から考える．任意の

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

に対して，

$$f(\boldsymbol{a}) = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，$\mathrm{Im}(f)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される．ところが，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

であるから，$\mathrm{Im}(f)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

で生成されることがわかる．さらに，この 2 つのベクトルは一次独立である．実際，

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

とすると，第 1 行から $x = 0$ となるので，第 2 行より $y = 0$ であることも分かる．従って，これらは $\mathrm{Im}(f)$ の基底であることが分かる．よって，$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

次に，$\mathrm{Ker}(f)$ について考える．次元公式から，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ であることが分かる．また，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow \begin{cases} a + c & = 0 \\ 2a - b + c & = 0 \\ 3a - 2b + c & = 0 \end{cases}$$

である．この連立方程式において，第 1 式を用いて第 2 式から c を消去すると $a = b$ を得る．$c = -a, b = a$ を第 3 式に代入すると自明な関係式が得られるので，

$$\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ a \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であることが分かる．即ち，$\mathrm{Ker}(f)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で生成される．特に，$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ であるので，これが $\mathrm{Ker}(f)$ の基底になることが分かる．□

例題 10.16 V をベクトル空間とし，$f : V \to V$ を $f^2 = f$ を満たす V 上の線型変換とする．ここで，f^2 は $f \circ f$ を表す.

(1) $g = \mathrm{id}_V - f$ とおくとき，

$$g^2 = g, \quad f \circ g = g \circ f = O$$

となることを示せ．ここで，O は零写像を表す.

(2) $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$，$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$ を示せ.

(3) $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ となることを示せ.

解答

(1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$\begin{aligned} g^2(\boldsymbol{x}) &= g(g(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})) \\ &= \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) + f^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) \\ &= g(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

及び,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) - f^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \\ (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) - f(f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) - f^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

より，求める式を得る.

(2) まず，$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ について考える．そこで，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(g)$ とする．すると，

$$\boldsymbol{0} = g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})$$

より，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ を得る．即ち，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$．一方，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると，ある $\boldsymbol{y} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y})$ となる．このとき，(1) の結果より，

$$g(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{y})) = (g \circ f)(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$$

となるので，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(g)$ である．よって，$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ が示される．全く同様にして $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$ も示される．
(3) 任意の $v \in V$ に対して，g の定義から，

$$\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})$$

と書ける．さらに，$f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(f)$ は明らかで，また，(2) の結果から，$g(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ である．ゆえに，あとは $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$ となることを示せば良い．

そこで，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ とする．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ ゆえ，

$$g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

即ち，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ である．一方，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ より，$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$．従って，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を得る．ゆえに，$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$ を得る．□

例題 10.17 以下の実行列の階数を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ y & 1 & x \\ 1 & x & y \end{pmatrix}$$

解答

(1) $\mathrm{rank}\, A$ について．
行列 A に次のような基本変形を施す．

(i) 第 1 行と第 2 行を入れ換える．

(ii) 第 2 行に第 1 行の $-x$ 倍を足す．

(iii) 第 2 行と第 3 行を入れ換える．

(iv) 第 3 行に第 2 行の $x^2 - 1$ 倍を足す．

すると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x^2 & -x \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 1-x^2 & -x \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x^3 - 2x \end{pmatrix}$$

従って，$x^3-2x=0$，即ち，$x=0,\pm\sqrt{2}$ のとき，$\operatorname{rank} A=2$ であり，$x\neq 0,\pm\sqrt{2}$ のとき，$\operatorname{rank} A=3$ となる．

(2) $\operatorname{rank} B$ について．
行列 B において，第 3 行に第 1 行及び，第 2 行を加えた行列を B' とすると，

$$B'=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ y & 1 & x \\ x+y+1 & x+y+1 & x+y+1 \end{pmatrix}$$

となる．
(I). $x+y+1=0$ のとき．
このとき，B' に次のような基本変形を施す．

(i) 第 1 列に第 2 列と第 3 列を足す．

(ii) 第 1 列と第 3 列を入れ換える．

(iii) 第 2 行に第 1 行の $-x$ 倍を足す．

すると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x & -x-1 & 1 \\ -x-1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -x-1 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -x-1 & 0 \\ 0 & x^2+x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで，

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，$\operatorname{rank} B=2$ であることが分かる．
(II). $x+y+1\neq 0$ のとき．
このとき，B' に次のような基本変形を施す．

(i) 第 3 行を $x+y+1$ で割る．

(ii) 第 1 行と第 3 行を入れ換える．

(iii) 第 2 行に第 1 行の $-y$ 倍を足す．

(iv) 第 3 行に第 1 行の $-x$ 倍を足す．

すると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ y & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & x \\ x & y & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-y & x-y \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-y & x-y \\ 0 & y-x & 1-x \end{pmatrix}$$

そこで，$y=1$ の場合は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \\ 0 & 1-x & 1-x \end{pmatrix}$$

となるので，$x=1$ のとき $\operatorname{rank} B = 1$ であり，$x \neq 1$ であれば，第 2 行と第 3 行を入れ換えることにより，$\operatorname{rank} B = 3$ であることが分かる．

次に，$y \neq 1$ の場合を考える．このときは，さらに基本変形を続けて，

(v) 第 2 行を $1-y$ で割る．

(vi) 第 3 行に第 2 行の $x-y$ 倍を足す．

(vii) 第 3 行を $1-y$ 倍．

を施すと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-y & x-y \\ 0 & y-x & 1-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{1-y} \\ 0 & y-x & 1-x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{1-y} \\ 0 & 0 & 1-x+\frac{(x-y)^2}{1-y} \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{1-y} \\ 0 & 0 & (1-x)(1-y)+(x-y)^2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} (1-x)(1-y)+(x-y)^2 &= x^2-xy-x+y^2-y+1 \\ &= \left(x-\frac{y+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2 > 0 \end{aligned}$$

となるので，$\operatorname{rank} B = 3$ であることが分かる．以上まとめると，

$$\operatorname{rank} B = \begin{cases} 3, & x+y+1 \neq 0 \text{ かつ } (x,y) \neq (1,1). \\ 2, & x+y+1 = 0 \text{ のとき.} \\ 1, & x=y=1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

となる．□

例題 10.18 n を 2 以上の自然数とする．以下のような n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & O & & O \\ a_{21} & 1 & & \ddots & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{各 } a_{ij},\ (1 \leq j < i \leq n) \text{ は整数}$$

全体からなる，$M_n(\mathbb{R})$ の部分集合を $\Lambda_n(\mathbb{Z})$ とおく．

(1) 任意の $A,\ B \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ に対して，$AB \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ を示せ.

(2) $P(i, j; 1)$ を，対角成分と (i, j) 成分が 1 で，それ以外は 0 であるような基本行列とする．各 $1 \leq j < i \leq n$ 及び，任意の整数 $a,\ b$ に対して，

$$P(i, j; a)P(i, j; b) = P(i, j; a + b)$$

が成り立つことを示せ．さらに，

$$P(i, j; 1)^a = P(i, j; a)$$

を示せ.

(3) $2 \leq i \leq n$ とするとき，任意の整数の組 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i,i-1}$ に対して，

$$D(i; a_{i1}, \ldots, a_{i,i-1}) = P(i, 1; 1)^{a_{i1}} P(i, 2; 1)^{a_{i2}} \cdots P(i, i-1; 1)^{a_{i,i-1}}$$

とおくとき，$D(i; a_{i1}, \ldots, a_{i,i-1})$ を具体的に行列で表せ.

(4) $\Lambda_n(\mathbb{Z})$ の任意の元は,

$$D(2; a_{21})D(3; a_{31}, a_{32}) \cdots D(n; a_{n1}, \ldots, a_{n,n-1})$$

なる形に一意的に表わされることを示せ.

(5) 任意の $A \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ に対して，A は正則で，$A^{-1} \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ となることを示せ.

解答

(1) 任意の $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}) \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ に対して，$C = AB = (c_{ij})$ とおく．行列の積の定義より,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

であるので，a_{ij}, b_{ij} がすべて整数であれば，c_{ij} も整数である.

$1 \leq i < j \leq n$ とする．各 $1 \leq k \leq i$ に対して，$b_{kj} = 0$ であり，各 $i < k \leq n$ に対して，$a_{ik} = 0$ であるので，$c_{ij} = 0$ である.

一方，$1 \leq i \leq n$ とする．同様に，各 $1 \leq k < i$ に対して $b_{kj} = 0$ であり，各 $i < k \leq n$ に対して $a_{ik} = 0$ である．さらに，$k = i$ のとき，$a_{ii} = b_{ii} = 1$ ゆえ $c_{ii} = 1$ である．

従って，$C \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ であることが分かる．

(2) $P(i,j;a)P(i,j;b)$ は，$P(i,j;b)$ の第 j 行を a 倍して第 i 行に加えたものである．$P(i,j;b)$ の第 j 行は，対角成分が 1 でそれ以外は 0 であるから，第 j 行を a 倍したものは

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

となる．ゆえに，$P(i,j;a)P(i,j;b) = P(i,j;a+b)$ である．

一方，任意の自然数 $m \geq 1$ に対して，$P(i,j;1)^m = P(i,j;m)$ となることを，m についての帰納法で示す．$m = 1$ のときは明らか．$m \geq 1$ とするとき，帰納法の仮定及び，上の結果より，

$$P(i,j;1)^{m+1} = P(i,j;1)^m P(i,j;1) = P(i,j;m)P(i,j;1) = P(i,j;m+1)$$

となり，帰納法が進む．さらに，

$$P(i,j;1)P(i,j;-1) = P(i,j;0) = E_n$$

であるから，$P(i,j;1)^{-1} = P(i,j;-1)$ である．従って，同様の帰納法の議論により，

$$P(i,j;1)^{-m} = (P(i,j;1)^{-1})^m = P(i,j;-1)^m = P(i,j;-m)$$

となることが分かる．ゆえに，任意の整数 a に対して，

$$P(i,j;1)^a = P(i,j;a)$$

である．

(3) (2) の結果より，

$$D(i;a_{i1},\ldots,a_{i,i-1}) = P(i,1;a_{i1})P(i,2;a_{i2})\cdots P(i,i-1;a_{i,i-1})$$

である．各 $1 \leq k \leq i-1$ に対して，

$$P(i,1;a_{i1})\cdots P(i,k;a_{i,k})$$

は，第 i 行が

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \phantom{a_{i1}} & \phantom{a_{i2}} & & \phantom{a_{ik}} & & i & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & O & 1 & O \end{pmatrix} \end{array}$$

であり，その他の行は対角成分のみが 1 でそれ以外が 0 となるような，行列となることを k についての帰納法で示す．$k=1$ のときは明らか．そこで，$k \geq 1$ とする．このとき，

$$P(i,1;a_{i1})\cdots P(i,k;a_{i,k})P(i,k+1;a_{i,k+1})$$

は，$P(i,1;a_{i1})\cdots P(i,k;a_{i,k})$ の第 i 列を $a_{i,k+1}$ 倍したものを第 $k+1$ 列に足したものである．ところが，帰納法の仮定から，$P(i,1;a_{i1})\cdots P(i,k;a_{i,k})$ の第 i 列は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ であるから，$P(i,1;a_{i1})\cdots P(i,k;a_{i,k})P(i,k+1;a_{i,k+1})$ の第 i 行は

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & & & & i & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{i,k+1} & O & 1 & O \end{pmatrix} \end{array}$$

であり，その他の行は対角成分のみが 1 でそれ以外が 0 となるような，行列になる．よって帰納法が進む．

これより，

$$D(i;a_{i1},\ldots,a_{i,i-1}) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} E & & & & \\ O & \ddots & & & \\ O & & E & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,i-1} & 1 & \\ O & \cdots & \cdots & O & E \end{pmatrix}$$

となることが分かる．

(4) (3) と同様の議論により，$D(2;a_{21})D(3;a_{31},a_{32})\cdots D(n;a_{n1},\ldots,a_{n,n-1})$ は，単位行列 E_n から出発して，

- $\boldsymbol{e}_2$ を a_{21} 倍したものを第 1 列に加える．
- $\boldsymbol{e}_3$ を a_{31} 倍したものを第 1 列に加える．
- $\boldsymbol{e}_3$ を a_{32} 倍したものを第 2 列に加える．
- $\vdots$

なる操作を施して出来上がる行列であることが分かる．従って，

$$D(2;a_{21})D(3;a_{31},a_{32})\cdots D(n;a_{n1},\ldots,a_{n,n-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & O & & O \\ a_{21} & 1 & & \ddots & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & & O \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

となる．ゆえに，$\Lambda_n(\mathbb{Z})$ の任意の行列はこのような表示を持ち，かつそれは一意的であることも明らか.

(5) (4) より，各 $A \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ は基本行列 $P(i,j;1)$ の積で表わされるので正則であり，(2) より，$A^{-1} \in \Lambda_n(\mathbb{Z})$ であることも分かる．□

注意 10.19 上記の結果により，$\Lambda_n(\mathbb{Z})$ は群になることが分かる．これを，n 次の**ハイゼンベルグ群**という.

11 レポート問題その1

問題 11.1 $p,\ q>1$ を互いに素な2つの素数とする．このとき，

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\{a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq}\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}$$

を考える．

(1) 実数の和及び積を考えることで，$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ は自然に体の構造を持つことを示せ．

(2) 実数の和及び積を考えることで，$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ は自然に $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の構造を持つ．このとき，$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底を求めよ．

(3) 実数の和及び積を考えることで，$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ は自然に $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 上のベクトル空間になる．このとき，$\mathbb{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ の $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ 上の基底を求めよ．

（分かりにくい場合は，$p=2,\ q=3$ として考えてみよ．）

問題 11.2 $p>1$ を整数とし，$\mathbb{R}$ の部分集合

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})=\{a+b\sqrt[3]{p}+c(\sqrt[3]{p})^2\in\mathbb{R}\,|\,a,b,c\in\mathbb{Q}\}\subset\mathbb{R}$$

を考える．ω を1の原始3乗根 $(-1+\sqrt{3}\sqrt{-1})/2$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の $a,b,c\in\mathbb{Q}$ に対して，

$$(a+b\sqrt[3]{p}\omega+c(\sqrt[3]{p})^2\omega^2)(a+b\sqrt[3]{p}\omega^2+c(\sqrt[3]{p})^2\omega)\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$$

を示せ．

(2) 任意の $a,b,c\in\mathbb{Q}$ に対して，

$$(a+b\sqrt[3]{p}+c(\sqrt[3]{p})^2)(a+b\sqrt[3]{p}\omega+c(\sqrt[3]{p})^2\omega^2)(a+b\sqrt[3]{p}\omega^2+c(\sqrt[3]{p})^2\omega)\in\mathbb{Q}$$

を示せ．

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ は実数の和及び積を考えることで体になることを示せ．

(4) 実数の和及び積を考えることで，$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間になる．このとき，$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{p})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底を求めよ．

問題 11.3 A を (n,m) 次行列とする．このときある (m,n) 次行列 B が存在して，$ABA=A$ を満たすことを示せ．

問題 11.4 A を $A\,{}^tA = {}^tAA$ を満たす n 次正方行列とするとき, 以下の問いに答えよ.
(1) $\boldsymbol{v} \in K^n$ に対して, $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となることと, ${}^tA\boldsymbol{x} = 0$ となることは同値であることを証明せよ.
(2) $k \geq 1$ を自然数とするとき, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^k)$ が成り立つことを示せ.

次の問題では，体上ではなく, 環上の線型代数を考える. 簡単に言えば，環とは，体の公理から逆元の存在を取り除いた公理をを満たすような代数系である．詳細は二回生以上の内容であるが, 今やっておいても問題はない. 環の細かい性質などは割愛するので, 各自勉強すること.

問題 11.5 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数多項式環とし, F をその商体とする. S の微分全体のなす加群 $\mathrm{Der}(S)$ を,

$$\mathrm{Der}(S) = \oplus_{i=1}^n S \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

で定義する. C^n 上の ℓ 個の一次式 $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ で定義される $\mathbb{C}^n$ の中の図形（超平面という）たちの集まりを $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$ とかく. これを $\mathbb{C}^n$ の中の超平面配置とよぶ. 以下の問題に答えよ.
(1)

$$D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \theta(\alpha_i) \in S \text{ が} \alpha_i \text{で割りきれる } (i = 1, \ldots, \ell)\}$$

と定義する. このとき $Q = \prod_{i=1}^{\ell} \alpha_i$ とおけば,

$$D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \theta(Q) \in S \text{ が } Q \text{ で割りきれる }\}$$

であることを示せ.
(2) $\theta_1, \ldots, \theta_n \in D(\mathcal{A})$ に対して, (i,j) 成分に $\theta_j(x_i)$ を持つような $M_n(S)$ の行列を $M(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ とおく. このとき,

$$D(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^n S \cdot \theta_i$$

となることは,

$$\det M(\theta_1, \ldots, \theta_n) = cQ \ (c \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

となることと同値になることを示せ. このような $\theta_1, \ldots, \theta_n$ を $D(\mathcal{A})$ の基底と呼ぶ.
(3) $\mathcal{A}$ を $x_1 Q' = 0$ (Q' は x_1 を含まない一次式の積) で定義されるような $\mathbb{C}^2$ 中の超平面配置とする. このとき $D(\mathcal{A})$ の基底を求めよ.
(4)

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) = 0$$

で定義されるような $\mathbb{C}^{n+1}$ 中の超平面配置に対して, $D(\mathcal{A})$ の基底を求めよ.

問題 11.6 $A=\{a_{ij}\}$ を実 n 次正方行列で, $a_{ii}=1$, $\mid a_{ij}\mid < \dfrac{1}{n-1}$ $(i\neq j)$ を満たすものとする．このとき $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して,

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

となることを示せ.

問題 11.7 実係数の n 次正方行列 $A=\{a_{ij}\}$ が

$$A^3+A=O$$

を満たすとする．このとき

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}=0$$

となることを示せ.

問題 11.8 V を K 上のベクトル空間とする．このとき以下の (A) と (B) は同値であることを示せ.

(A) V の元 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が一次独立である.

(B) $\dim W>0$ たる任意のベクトル空間 W と，W の任意の元 $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n$ に対して,

$$f(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{w}_i, \qquad (i=1,\ldots,n)$$

となるような，線型写像 $f:V\to W$ が存在する.

問題 11.9 V, W, U を有限次元ベクトル空間とし, $f:V\to W$, $g:V\to U$ する．このとき以下の (A) と (B) は同値であることを示せ.

(A) $\mathrm{Ker}(g)\supset\mathrm{Ker}(f)$.

(B) $h\circ f=g$ を満たす線型写像 $h:W\to U$ が存在する.

12 計量ベクトル空間

本講の目標

- **計量ベクトル空間**（= **内積**の入ったベクトル空間）の定義と性質を理解する．
- **Schmidt の直交化法**を用いて，計量ベクトル空間の**正規直交基底**を求める．
- **直交補空間**を理解し，その基底を求める．
- 計量ベクトル空間の部分空間，及びその直交補空間への**直交射影**を求める．
- **随伴写像**と**随伴行列**の定義と性質を理解する．

12.1 ベクトル空間の内積

n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

に対して，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} \tag{8}$$

とおき，これを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**内積**という．このとき，写像

$$\cdot : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

を $\cdot\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ で定めると，以下の性質を満たす．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

(1) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}$

(2) $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}$, $\quad (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = {}^t(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}) = {}^t({}^t\boldsymbol{y} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}) = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \overline{({}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}})} = \overline{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}})$

(3) $(\alpha\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$

(4) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \geq 0$ であり，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

これを一般化して，体 K（$K = \mathbb{C}$ または $\mathbb{R}$）上のベクトル空間 V と，写像 $\cdot : V \times V \to K$ であって，上の (1), ..., (4) を満たすものが与えられているとき，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**内積**といい，V を**計量ベクトル空間**という．$K = \mathbb{R}$ のときは，(2) の条件は $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ となることに注意する．

(1), ..., (4) から，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in V$ と $\alpha \in K$ に対して，

(1)’ $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}'$

(3)’ $\boldsymbol{x}\cdot(\alpha\boldsymbol{y})=\overline{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$

が成り立つことが分かる．実際，(1)’ については，

$$\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')=\overline{(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')\cdot\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{x}}=\overline{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}'$$

である．(3)’ についても同様．また，$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}$ より，

$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0})\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}$$

となるので，$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{x}=0$ であることが分かる．

以下，K^n を計量ベクトル空間とみなすときは，特に断らない限り (8) による内積を考える．これを K^n の**標準内積**という．

さて，計量ベクトル空間 V の各元 $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\geq 0$ に注意することで，

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}\geq 0$$

が定義される．これを $\boldsymbol{x}$ の**長さ**という．長さに関して，以下の基本的な性質が成り立つ．

(1) $\|\boldsymbol{a}\|\geq 0,\quad$ 等号成立は $\boldsymbol{a}=0$ のときに限る．

(2) $\|\alpha\boldsymbol{a}\|=|\alpha|\ \|\boldsymbol{a}\|,\quad \alpha\in K$

(1) については明らか．(2) については，

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|^2=(\alpha\boldsymbol{x})\cdot(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})=|\alpha|^2\ \|\boldsymbol{x}\|^2$$

より導かれる．また，$\alpha\in K,\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ のとき，

$$\|\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+|\alpha|^2\|\boldsymbol{y}\|^2+\alpha(\overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}})+\overline{\alpha}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) \tag{9}$$

が成り立つ．(9) において，$\alpha=1,\sqrt{-1}$ とおくことにより，それぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})&=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2)\\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})&=\frac{1}{2}(\|\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}\boldsymbol{y}\|^2-\|\boldsymbol{x}\|^2-\|\boldsymbol{y}\|^2)\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．(10) は内積と長さの変換公式である．

定理 12.1 任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して，次が成り立つ．

(1) $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ （**$\boldsymbol{Schwarz}$の不等式**）

(2) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ （**三角不等式**）

証明 (1) $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ ならば明らかに正しい．そこで，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ とする．(9) で，

$$\alpha = -\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}0 \leq \|\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \frac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^4}\|\boldsymbol{y}\|^2 - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}(\overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}) - \frac{\overline{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 - \frac{|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|^2}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\end{aligned}$$

となるので，両辺に $\|\boldsymbol{y}\|^2$ を乗じることで求める不等式を得る．
(2) 上の式 (9) 及び，(i) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\\ &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2\end{aligned}$$

となるので，求める式を得る．□

注意 12.2 $K=\mathbb{R}$のとき，上の定理の (i) は次のようにしても示すことができる．(9) より，

$$0 \leq \|\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \alpha^2\|\boldsymbol{y}\|^2$$

がすべての $\alpha\in\mathbb{R}$ で成立する．従って，右辺を α に関する 2 次式とみなすと，その判別式を考えることにより，

$$D/4 = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2 - \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0$$

となり，求める式を得る．

さらに，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ のとき，(i) より，

$$-1 \leq \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \leq 1$$

となる．従って，ある $\theta\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\theta$$

と書けることが分かる．

12.2 正規直交基底の存在と計量同型

計量ベクトル空間 V の二つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ のとき, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交する**といい, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ で表す．明らかに，$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$ である．$\boldsymbol{x}$ または $\boldsymbol{y}$ が $\mathbf{0}$ のときは明らかに $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ である．即ち，**零ベクトル $\mathbf{0}$ はすべてのベクトルに直交する**と考える．

計量ベクトル空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が各 $i \neq j$ に対して

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$$

満たすとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は**直交系**をなしているという．さらに，これらが

$$\| \boldsymbol{a}_i \| = 1, \quad 1 \leq i \leq k$$

を満たすとき，**正規直交系**であるという．また，直交系かつ基底であるベクトルの組を**直交基底**といい，正規直交系かつ基底であるベクトルの組を**正規直交基底**という．

例 12.3 K^n の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は正規直交基底である．

一般に，$\mathbf{0}$ でない V のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して,

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{\| \boldsymbol{a} \|} \boldsymbol{a}$$

とおく．($V = \mathbb{R}^n$ の場合には，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで長さが 1 のベクトルである.）この $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ の**単位ベクトル化**という．任意の直交系は，単位ベクトル化を行うことにより正規直交系になる．

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を計量ベクトル空間 V の直交系とし,

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k \in V$$

とする．このとき，各 $1 \leq j \leq k$ に対して，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j = \alpha_j \| \boldsymbol{a}_j \|^2$ となる．従って，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とすると，$\alpha_j = 0, 1 \leq j \leq k$ を得る．これは，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立であることを示している．即ち，直交系は一次独立である．また，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が V の直交基底であれば，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して,

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n$$

と一意的に表わされるが，$\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{a}_j$ 成分の係数 α_j は内積を用いて,

$$\alpha_j = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j}{\| \boldsymbol{a}_j \|^2}$$

と表されることも分かる．特に，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交基底であれば,

$$\alpha_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_j$$

である．

定理 12.4 V を n 次元計量ベクトル空間，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を V の直交系とする．このとき，$n-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を適当に取ることで，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が V の直交基底となるようにできる．

証明 「$k < n$ のとき，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k+1}$ が直交系となるような $\boldsymbol{a}_{k+1} \in V$ が存在すること」を示せばよい．すると，$k < n$ なので，ある $\boldsymbol{a}' \notin \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ が存在する．このとき，

$$\boldsymbol{a}_{k+1} = \boldsymbol{a}' - \sum_{i=1}^{k} \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}_i}{\| \boldsymbol{a}_i \|^2} \boldsymbol{a}_i$$

とおく．すると，各 $1 \leq j \leq k$ に対して，

$$\boldsymbol{a}_{k+1} \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}_j - \frac{\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}_j}{\| \boldsymbol{a}_j \|^2} \| \boldsymbol{a}_j \|^2 = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}_j = 0$$

となる．さらに，$\boldsymbol{a}' \notin \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ であるから，$\boldsymbol{a}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ であり，特に，$\boldsymbol{a}_{k+1} \neq \boldsymbol{0}$ を得る．□

系 12.5 V を計量ベクトル空間，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を V の一次独立なベクトルの組とする．このとき，V の正規直交系 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ であって，各 $1 \leq j \leq k$ に対して，

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j \rangle$$

となるようなものを作ることができる

証明 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ を帰納的に構成する．まず，

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{\| \boldsymbol{a}_1 \|} \boldsymbol{a}_1$$

とおく．次に，$k \geq 1$ として，題意を満たす正規直交系が $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_j$ まで作られたとする．このとき，

$$\boldsymbol{a}'_{j+1} = \boldsymbol{a}_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} (\boldsymbol{a}_{j+1} \cdot \boldsymbol{b}_i) \boldsymbol{b}_i$$

とおく．すると，定理 12.4 と同様の議論により，各 $1 \leq i \leq j$ に対して，$\boldsymbol{a}'_{j+1} \perp \boldsymbol{b}_i$ となることが分かる．そこで，

$$\boldsymbol{b}_{j+1} = \frac{1}{\| \boldsymbol{a}'_{j+1} \|} \boldsymbol{a}'_{j+1}$$

とすれば，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{j+1}$ は求める正規直交系である．以下この議論を繰り返せばよい．□

系 12.5 による，正規直交基底の構成法を **Schmidt の直交化法**という．上記の Schmidt の直交化法において，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq k$ が V の正規直交系であるときは，$\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}_j$, $1 \leq j \leq i$ である．

系 12.6 n 次元計量ベクトル空間 V には正規直交基底が存在する．また，V の正規直交系 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が与えられたとき，適当な $n-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を付け加えて，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が V の正規直交基底であるようにすることができる．

計量ベクトル空間 V, V' の間の線型写像 $f : V \to V'$ について，次は同値である．

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ に対して，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}')$．即ち，$f$ は内積を保つ．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\| \boldsymbol{x} \| = \| f(\boldsymbol{x}) \|$．即ち，$f$ は長さを保つ．

実際，(1) から (2) は明らかである．(2) を仮定すると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}') &= \frac{1}{2}(\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \|^2 - \| \boldsymbol{x} \|^2 - \| \boldsymbol{x}' \|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\| f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \|^2 - \| f(\boldsymbol{x}) \|^2 - \| f(\boldsymbol{x}') \|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\| f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}') \|^2 - \| f(\boldsymbol{x}) \|^2 - \| f(\boldsymbol{x}') \|^2) \\
&= \mathrm{Re}(f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}'))
\end{aligned}
$$

となる．

$$
\mathrm{Im}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}') = \mathrm{Im}(f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}'))
$$

についても同様である．従って，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{x}')$ を得る．

補題 12.7 上の (1) または (2) を満たす線型写像 f は単射である．

証明 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とすると，$\| \boldsymbol{x} \| = \| f(\boldsymbol{x}) \| = 0$ であるから直ちに $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が導かれる．□

上の (1) または (2) を満たす線型写像 f がさらに全射であるとき，f を**計量同型写像**という．またこのとき，V と V' は**計量同型**であるという．

例 12.8 系 *12.6* により，n 次元計量ベクトル空間 V には正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が存在する．写像 $f : K^n \to V$ を

$$
f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{b}_j, \quad 1 \leq j \leq n
$$

で定まる線型写像とすると，f は計量同型写像である．

補題 12.9 V を計量ベクトル空間，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とする．このとき，

$$
\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \text{全ての } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対して } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}
$$

が成り立つ．

証明 $\Longrightarrow$ は明らか．$\Longleftarrow$ を示す．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$0 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

が成り立つ．そこで，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ とすれば，$\| \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \|^2 = 0$ より，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ を得る．□

12.3 直交補空間と直交射影

計量ベクトル空間 V とその部分集合 S に対して，

$$S^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V \mid すべての\ \boldsymbol{y} \in S\ について, \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0\}$$

は V の部分空間となる．実際，$\boldsymbol{0} \in S^\perp$ であり，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in S^\perp$, $\alpha \in K$ とすると，任意の $\boldsymbol{y} \in S$ に対して，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y} = 0$$

より，$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') \cdot \boldsymbol{y} = 0$ を得る．さらに，$(\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = 0$ であることも分かる．この $S^\perp$ を S の**直交補空間**と呼ぶ．

$S, T \subset V$ とするとき，以下のことが成り立つ．

(1) $S \subset (S^\perp)^\perp$

(2) $S \subset T$ であれば，$S^\perp \supset T^\perp$

(3) $V^\perp = \{\boldsymbol{0}\}$

(4) $\phi^\perp = \{\boldsymbol{0}\}^\perp = V$

W を V の部分空間とする．$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ が W の正規直交基底のとき，これらは V の正規直交系であるので，あるベクトル $\boldsymbol{b}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を付け加えて，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が V の正規直交基底となるようにできる．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{b}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{b}_n \in V$$

とすると，各 $1 \leq i \leq n$ に対して，$\alpha_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i$ であった．従って，$\boldsymbol{x} \in W^\perp$ であれば，

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$$

となることが分かる．一方，$\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{b}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$ であれば，任意の $\boldsymbol{y} \in W$ に対して，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ である．ゆえに，

$$W^\perp = \langle \boldsymbol{b}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n \rangle$$

を得る．特に，次が従う．

補題 12.10 計量ベクトル空間 V，及びその部分空間 W に対して

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W, \quad V = W \oplus W^{\perp}$$

が成り立つ．

上の議論において，$\boldsymbol{b}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が $W^{\perp}$ の正規直交基底であることも分かる．さらに，$(W^{\perp})^{\perp} = W$ も成り立つ．実際，$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ であり，

$$\dim (W^{\perp})^{\perp} = n - \dim W^{\perp} = n - (n - \dim W) = \dim W$$

となるので，$W = (W^{\perp})^{\perp}$ である．

V を計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．$V = W \oplus W^{\perp}$ より，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は一意的に，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in W, \quad \boldsymbol{x}_2 \in W^{\perp}$$

と書ける．このとき，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}_1$ を対応させる写像 $p_W : V \to V$ を W **への直交射影**という．同様に，$\boldsymbol{x}$ に $\boldsymbol{x}_2$ を対応させる写像 $p_{W^{\perp}} : V \to V$ を $W^{\perp}$ **への直交射影**という．即ち，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = p_W(\boldsymbol{x}) + p_{W^{\perp}}(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．また，上記の記号を踏襲すれば，

$$\boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i, \quad \boldsymbol{x}_2 = \sum_{i=m+1}^{n} (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i = (1 - p_W)(\boldsymbol{x})$$

である．W への直交射影 p_W に関して次のことが成り立つ．

(1) $p_W \circ p_W = p_W$

(2) $p_W \circ (1 - p_W) = (1 - p_W) \circ p_W = 0$

(3) $(1 - p_W) \circ (1 - p_W) = 1 - p_W$

$p_{W^{\perp}}$ についても同様である．

ここで，一般のベクトル空間の射影について考えよう．V をベクトル空間，$W_1, W_2 \subset V$ を部分空間であって，$V = W_1 \oplus W_2$ とする．このとき，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は一意的に，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2$$

と書ける．このとき，写像 $p_1, p_2 : V \to V$ をそれぞれ，

$$p_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1, \quad p_2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_2$$

によって定める．p_1, p_2 をそれぞれ，W_1, W_2 への**射影**という．このとき，

$$p_1 + p_2 = 1, \quad p_1^2 = p_1, \quad p_2^2 = p_2, \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$$

が成り立つ．

逆に，ベクトル空間 V 上の線型変換 $p_1 : V \to V$ で，$p_1^2 = p_1$ なるものが与えられた時，$p_2 = 1 - p_1$ とおくと，

$$p_2^2 = p_2, \quad p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$$

が成り立つ．さらに，$W_1 = \mathrm{Im}(p_1), W_2 = \mathrm{Im}(p_2)$ とおくと，$W_1 + W_2 = V$ である．このとき，$\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ とすると，ある $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ が存在して，$\boldsymbol{x} = p_1(\boldsymbol{a}) = p_2(\boldsymbol{b})$ となり，

$$\boldsymbol{x} = p_1(\boldsymbol{a}) = p_1^2(\boldsymbol{a}) = p_1(\boldsymbol{x}) = p_1 \circ p_2(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$$

を得る．従って，$V = W_1 \oplus W_2$ であることが分かる．

12.4 随伴写像と随伴行列

複素数 $\mathbb{C}$ を成分とする (m, n) 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，(n, m) 行列

$$A^* = (\overline{a_{ji}})$$

を A の**随伴行列**という．$A^* = \overline{{}^tA}$ であり，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$ に対して，

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{y}} = ({}^t\boldsymbol{x}{}^tA)\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tA\overline{\boldsymbol{y}}) = {}^t\boldsymbol{x}(\overline{A^*\boldsymbol{y}}) = {}^t\boldsymbol{x} \cdot (A^*\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

定理 12.11 V を n 次元計量ベクトル空間，$g : V \to K$ を線型写像とする．このとき，ある $\boldsymbol{a} \in V$ が一意的に存在して，

$$\text{全ての } \boldsymbol{x} \in V \text{ に対して } g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つ．

証明 $g=0$ であれば，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ と取ればよい．$g\neq 0$ のときは，$\dim(\operatorname{Ker} g)=n-1$ であり，$\dim(\operatorname{Ker} g)^{\perp}=1$．従って，

$$(\operatorname{Ker} g)^{\perp}=\langle \boldsymbol{a}'\rangle, \quad \| \boldsymbol{a}' \|=1$$

なるベクトル $\boldsymbol{a}'\in V$ が存在する．そこで，$\boldsymbol{a}=\overline{g(\boldsymbol{a}')}\boldsymbol{a}'$ とおく．すると，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，$\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{x}', \quad \lambda\in K,\ \boldsymbol{x}'\in\operatorname{Ker} g$$

と一意的に書ける．このとき，$g(\boldsymbol{x})=\lambda g(\boldsymbol{a}')$ であり，

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=(\lambda\boldsymbol{a}')\cdot\boldsymbol{a}=(\lambda\boldsymbol{a}')\cdot(\overline{g(\boldsymbol{a}')}\boldsymbol{a}')=\lambda g(\boldsymbol{a}')\,\|\,\boldsymbol{a}'\,\|^2=\lambda g(\boldsymbol{a}')=g(\boldsymbol{x})$$

となる．$\boldsymbol{a}$ の一意性については，補題 12.9 から直ちに従う．□

定理 12.11 における $\boldsymbol{a}$ を g **を表現するベクトル**という．一般に，$g\in V^*$ とみなすことができる．写像 $\xi: V\to V^*$ を

$$\xi(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{x}\in V$$

で定めると，補題 12.9 より，ξ は単射となる．ところが，ξ は $\mathbb{C}$ 線型写像ではない．実際，$\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，$\xi(\lambda\boldsymbol{a})=\overline{\lambda}\xi(\boldsymbol{a})$ である．従って，V, V^* を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすとき，ξ は $\mathbb{R}$ 線型写像になることが分かる．とくに，$\dim_{\mathbb{R}} V=\dim_{\mathbb{R}} V^*=2n$ であることに注意すると，ξ は全射であることがわかる．即ち，ξ は全単射である．このことからも，g を表現するベクトル $\boldsymbol{a}$ の存在と一意性が分かる．

V, W を有限次元計量ベクトル空間，$f: V\to W$ を線型写像，$\boldsymbol{y}\in W$ とする．このとき，線型写像 $g: V\to K$ を

$$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}\in V$$

で定義する．この g を表現するベクトルを $f^*(\boldsymbol{y})$ とおく．すると，写像

$$f^*: W\to V$$

が定まる．

定理 12.12 上の $f^*: W\to V$ は線型写像で，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ と，$\boldsymbol{y}\in W$ に対して

$$f(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot f^*(\boldsymbol{y}) \tag{11}$$

が成り立つ．特に，f は (11) によって一意的に定まる．

証明 f^* が線型であること以外は自明である．そこで，f^* が線型であることを示そう．任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}' \in W$ 及び，任意の $\lambda \in K$ に対して，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \cdot f^*(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') &= f(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} + f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x} \cdot f^*(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{x} \cdot f^*(\boldsymbol{y}') \\ &= \boldsymbol{x} \cdot (f^*(\boldsymbol{y}) + f^*(\boldsymbol{y}'))\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，補題 12.9 より，$f^*(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}') = f^*(\boldsymbol{y}) + f^*(\boldsymbol{y}')$ を得る．同様に，

$$\boldsymbol{x} \cdot f^*(\lambda \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \cdot (\lambda \boldsymbol{y}) = \overline{\lambda} f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \overline{\lambda} \boldsymbol{x} \cdot f^*(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot (\lambda f^*(\boldsymbol{y}))$$

よって，補題 12.9 より，$f^*(\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda f^*(\boldsymbol{y})$ を得る．ゆえに，f^* は線型写像である．□

上で定めた線型写像 $f^* : W \to V$ を f の**随伴写像**という．随伴写像に関して，以下の基本的な性質が成り立つ．

補題 12.13 V, W, U を有限次元計量ベクトル空間，$f : V \to W$, $g : W \to U$ を線型写像とするとき，以下が成り立つ．

(1) $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$

(2) $(1_V)^* = 1_V$

(3) $(f^*)^* = f$

(4) f が内積を保つ $\Longleftrightarrow$ $f^* \circ f = 1_V$

(5) f が計量同型写像 $\Longleftrightarrow$ $f^* \circ f = 1_V$, $f \circ f^* = 1_W$

証明 (1) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{z} \in U$ に対して，

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{z} = g(f(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}) \cdot g^*(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot f^*(g^*(\boldsymbol{z})) = \boldsymbol{x} \cdot (f^* \circ g^*(\boldsymbol{z}))$$

及び，

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot (g \circ f)^*(\boldsymbol{z})$$

が成り立つので求める式を得る．
(2) は明らか．(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して，

$$\boldsymbol{y} \cdot (f^*)^*(\boldsymbol{x}) = f^*(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x} \cdot f^*(\boldsymbol{y})} = \overline{f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} \cdot f(\boldsymbol{x})$$

より，$(f^*)^*(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ を得る．

(4) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，f が内積を保つとすると，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = f(\boldsymbol{a}) \cdot f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot f^*(f(\boldsymbol{b})) = \boldsymbol{a} \cdot (f^* \circ f(\boldsymbol{b}))$$

であるから，$\boldsymbol{b} = f^* \circ f(\boldsymbol{b})$ を得る．逆も同様である．
(5) (4) の結果より，

$$\begin{aligned} f \text{ が計量同型写像} &\iff f^* \circ f = 1_V \text{かつ } f \text{ が全単射} \\ &\iff f^* \circ f = 1_V \text{かつ } f^* = f^{-1} \\ &\iff f^* \circ f = 1_V \text{かつ } f \circ f^* = 1_W \end{aligned}$$

を得る．□

定理 12.14 V, W を有限次元計量ベクトル空間で，$\dim V = \dim W$, $f : V \to W$ を線型写像とするとき，以下は同値.

(1) 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{a}) \cdot f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. 即ち，$f$ は内積を保つ.

(2) 任意の $\boldsymbol{a} \in V$ に対して，$\| f(\boldsymbol{a}) \| = \| \boldsymbol{a} \|$. 即ち，$f$ は長さを保つ.

(3) f は計量同型写像.

(4) f^* は計量同型写像.

(5) $f^* \circ f = 1_V$.

(6) $f \circ f^* = 1_W$.

定理 12.15 V, W を計量ベクトル空間, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ 及び，$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ をそれぞれ，V, W の正規直交基底とする．$f : V \to W$ を線型写像，$f^* : W \to V$ を f の随伴写像とし，これらの基底に関する行列表示をそれぞれ，A, B とする．このとき，

$$B = A^*$$

である.

証明 各 $1 \leq j \leq n$ 及び，$1 \leq k \leq m$ に対して，

$$f(\boldsymbol{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{c}_i, \quad f^*(\boldsymbol{c}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \boldsymbol{b}_i$$

である．このとき，

$$a_{kj} = f(\boldsymbol{b}_j) \cdot \boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{b}_j \cdot f^*(\boldsymbol{c}_k) = \overline{b_{jk}}$$

であるので直ちに求める式を得る．□

特に，A を (m,n) 行列とし，A が定める線型写像 $\phi_A : K^n \to K^m$ とすると，

$$(\phi_A)^* = \phi_{A^*} : K^m \to K^n$$

となる．

補題 12.16 A を n 次正方行列とし，A が定める線型変換 $\phi_A : K^n \to K^n$ を考える．このとき，以下のことが成り立つ．

(I) $K = \mathbb{R}$ のとき．

(1) ϕ_A が計量同型写像 $\iff$ A が直交行列 $({}^tAA = A{}^tA = E_n)$

(2) $\phi_A = (\phi_A)^*$ $\iff$ A が対称行列 $({}^tA = A)$

(3) $\phi_A = -(\phi_A)^*$ $\iff$ A が対称行列 $({}^tA = -A)$

(II) $K = \mathbb{C}$ のとき．

(1) ϕ_A が計量同型写像 $\iff$ A がユニタリー行列 $(A^*A = AA^* = E_n)$

(2) $\phi_A = (\phi_A)^*$ $\iff$ A がエルミート行列 $(A^* = A)$

(3) $\phi_A = -(\phi_A)^*$ $\iff$ A が歪エルミート行列 $(A^* = -A)$

一般に，計量ベクトル空間 V 上の線型変換 $f : V \to V$ が，

$$f \circ f^* = f^* \circ f$$

を満たすとき，f を**正規変換**という．また，n 次正方行列 A が

$$A^*A = AA^*$$

を満たすとき，A を正規行列という．明らかに，

$$\phi_A \text{ が正規変換} \iff A \text{ が正規行列}$$

が成り立つ．

12.5　双対空間

V を体 K 上のベクトル空間とし，

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\alpha : V \to K \mid \alpha \text{は線型写像}\}$$

とおく．各 $\alpha, \beta \in V^*$, $\lambda \in K$ に対して，

$$(\alpha + \beta)(\boldsymbol{x}) = \alpha(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in V$$
$$(\lambda\alpha)(\boldsymbol{x}) = \lambda(\alpha(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} \in V$$

を考えることにより，V^* に和とスカラー倍が定義される．即ち，V^* にベクトル空間の構造が入る．V^* を V の**双対空間**という．

$f : V \to W$ が線型写像で，$\alpha \in W^*$ のとき，$\alpha : W \to K$ は線型写像であるので，

$$\alpha \circ f : V \to K$$

も線型写像である．そこで，写像 $f^* : W^* \to V^*$ を

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f$$

で定義する．f^* を f の**双対写像**という．(f^* は f の**随伴写像と同じ記号だが別のもの**であることに注意されたい.）このとき，以下のことが成り立つ.

定理 12.17　(1) $f : V \to W$ が線型写像のとき，$f^* : W^* \to V^*$ も線型写像である.

(2) $f : V \to W$, $g : W \to U$ が線型写像のとき，

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*, \quad (1_V)^* = 1_{V^*}$$

が成り立つ.

証明 (1)　任意の $\alpha \in W^*$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，

$$\alpha(f(\boldsymbol{x})) = (\alpha \circ f)(\boldsymbol{x}) = f^*(\alpha)(\boldsymbol{x})$$

が成立する．ゆえに，任意の $\alpha, \beta \in W^*$ に対して，

$$\begin{aligned} f^*(\alpha + \beta)(\boldsymbol{x}) &= (\alpha + \beta)(f(\boldsymbol{x})) = \alpha(f(\boldsymbol{x})) + \beta(f(\boldsymbol{x})) = f^*(\alpha)(\boldsymbol{x}) + f^*(\beta)(\boldsymbol{x}) \\ &= (f^*(\alpha) + f^*(\beta))(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

が成り立つので，$f^*(\alpha + \beta) = f^*(\alpha) + f^*(\beta)$ を得る．任意の $\lambda \in K$ に対して，$f^*(\lambda\alpha) = \lambda f^*(\alpha)$ となることも同様に示される．従って，f^* は線型写像である.

(2) 任意の $\alpha \in U^*$ に対して，$\alpha \circ (g \circ f) = (\alpha \circ g) \circ f$ なので，

$$(g \circ f)^*(\alpha) = f^*(\alpha \circ g) = f^*(g^*(\alpha)) = (f^* \circ g^*)(\alpha)$$

が成立する．$(1_V)^* = 1_{V^*}$ については明らか．□

注意 12.18 圏論をご存知の方は，ベクトル空間 V に V^* を対応させ，線型写像 f に f の双対写像 f^* を対応させることは，ベクトル空間と線型写像のなす圏からそれ自身への反変函手であることに注意されたい．

系 12.19 $f : V \to W$ が同型写像のとき，f^* も同型で，$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ である．

証明 $f : V \to W$ が同型であれば，$f^{-1} \circ f = 1_V$, $f \circ f^{-1} = 1_W$ であるから，

$$(f^{-1})^* \circ f^* = (f \circ f^{-1})^* = (1_W)^* = 1_{W^*}$$
$$f^* \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* = (1_V)^* = 1_{V^*}$$

が成り立つ．ゆえに，求める式を得る．□

定理 12.20 V を体 K 上の n 次元ベクトル空間で，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ をその基底とする．このとき，V^* の元 $f_1, \ldots, f_n$ を

$$f_i(\boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n$$

によって定めると，$f_1, \ldots, f_n$ は V^* の基底になる．

証明 任意の $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ に対して，

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\Big)(\boldsymbol{b}_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j(\boldsymbol{b}_i)) = \lambda_i$$

であることに注意する．そこで，

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$$

とすると，

$$\lambda_i = \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j\Big)(\boldsymbol{b}_i) = 0$$

がすべての $1 \leq i \leq n$ で成立するので，$f_1, \ldots, f_n$ は一次独立である．

一方，全ての $\alpha \in V^*$ に対して，

$$\alpha(\boldsymbol{b}_i) = \alpha(\boldsymbol{b}_i) f_i(\boldsymbol{b}_i) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha(\boldsymbol{b}_j) f_j\Big)(\boldsymbol{b}_i), \quad 1 \leq i \leq n$$

であるので,

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} \alpha(\boldsymbol{b}_j) f_j$$

となり，$f_1, \ldots, f_n$ が V^* を生成することが分かる．□

定理 12.20 で定めた，V^* の基底 $f_1, \ldots, f_n$ を $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の**双対基底**という．

$V = K^n$ のとき，V^* は $M(1, n; K)$ とみなせる．K^n の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ に対して，その双対基底 $f_1, \ldots, f_n$ の行列表示を考えるとき，

$$f_i = {}^t\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n$$

となる．即ち，$V = K^n = M(n, 1; K)$ のとき，

$$V^* = M(1, n; K) = \{{}^t\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} \in K^n\}$$

であり，

$$({}^t\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}) = \ {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$

となる．ここで，左辺は写像としての ${}^t\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{b}$ での値を意味し，右辺は行列の積を意味する．

一般の場合は次のように考える．$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を V の基底とするとき，$\phi : K^n \to V$ を

$$\phi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{b}_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

で定まる同型写像とすると，ϕ^* は同型写像であり，

$$(\phi^* f_i)(\boldsymbol{e}_j) = f_i(\phi(\boldsymbol{e}_j)) = f_i(\boldsymbol{b}_j) = \delta_{ij}$$

であるので，$\phi^*(f_i) = {}^t\boldsymbol{e}_i$ であり，$(\phi^*)^{-1}({}^t\boldsymbol{e}_i) = f_i$ である．即ち，$(\phi^*)^{-1} : K^n \to V^*$ は基底 $f_1, \ldots, f_n$ で定まる同型写像である．

V をベクトル空間とするとき，各 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，写像 $\varphi : V \to (V^*)^*$ を

$$\varphi(\boldsymbol{x})(f) = f(\boldsymbol{x}) \in K, \quad f \in V^*$$

によって定める．すると，φ は線型写像である．また，$\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ であれば，$\varphi(\boldsymbol{x})(f) = f(\boldsymbol{x}) = 0$ がすべての $f \in V^*$ について成り立つので，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．即ち，φ は単射である．さらに，もし $\dim V = n < \infty$ であれば，

$$\dim (V^*)^* = \dim V^* = \dim V = n$$

であるから，φ は全射である．この場合，φ を**自然な同型写像**といい，この φ によって，V と $(V^*)^*$ とを同一視する．

補題 12.21 V, W をベクトル空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ 及び，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ をそれぞれ，V, W の基底とする．また，

$$h_1, \ldots, h_n : \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ の双対基底}$$

$$g_1, \ldots, g_m : \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \text{ の双対基底}$$

とする．$f : V \to W$ を線型写像とし，

$$f \text{ の } \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ 及び，} \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \text{ に関する行列表示を } C$$

$$f^* \text{ の } g_1, \ldots, g_m \text{ 及び，} h_1, \ldots, h_n \text{ に関する行列表示を } D$$

とする．このとき，

$$D = {}^tC$$

が成り立つ.

証明 各 $1 \leq j \leq n$ 及び，$1 \leq k \leq m$ に対して，

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\boldsymbol{b}_i, \quad f^*(g_k) = \sum_{i=1}^{n} d_{ik}h_i$$

であるとすると，

$$c_{kj} = g_k \circ f(\boldsymbol{a}_j) = f^*(g_k)(\boldsymbol{a}_j) = d_{jk}$$

となるので求める等式を得る．□

注意 12.22 A を (m, n) 行列，$\boldsymbol{x} \in K^n$, $\boldsymbol{y} \in K^m$ のとき，線型写像 $\phi_A : K^n \to K^m$ について，

$${}^t\boldsymbol{y}(A\boldsymbol{x}) = ({}^t\boldsymbol{y}A)\boldsymbol{x} = {}^t({}^tA\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}$$

であるので，ϕ_A の双対写像は $\phi_{{}^tA}$ である.

ベクトル空間 V の部分空間 W に対して，$W^\perp$ を

$$W^\perp = \{f \in V^* \mid \text{全ての } \boldsymbol{x} \in W \text{ に対して } f(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

と定める. (W の直交補空間と同じ記号であるが，別物であることに注意されたい.)

定理 12.23 ベクトル空間 V の部分空間 W に対して，以下のことが成り立つ.

(1) $W^\perp$ は V^* の部分空間で，$\dim W^\perp = \dim V - \dim W$

(2) $(W^\perp)^\perp = W$,　(ただし，V と $(V^*)^*$ の自然な同一視のもとで.)

(3) W_1, W_2 が V の部分空間のとき，

$$(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp, \quad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$$

が成り立つ．

(4) $S = \{W \mid W$ は V の部分空間 $\}$，$S^* = \{W' \mid W'$ は V^* の部分空間 $\}$ とし，写像 $\xi : S \to S^*$ を

$$\xi(W) = W^\perp$$

で定めると，ξ は全単射で，

$$W_1 \subset W_2 \Longrightarrow W_1^\perp \supset W_2^\perp$$

が成り立つ．

証明 (1) $\mathbf{0} \in W^\perp$ は明らか．任意の $f, g \in W^\perp$, $\lambda \in K$ 及び，$\boldsymbol{x} \in W$ に対して，

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(f(\boldsymbol{x})) = 0$$

であるので，$W^\perp$ は V^* の部分空間である．また，$\dim W = m$ とおき，V の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ を，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ が W の基底となるようにとる．$f_1, \ldots, f_n$ を $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ の双対基底とするとき，$f_{m+1}, \ldots, f_n$ が $W^\perp$ の基底である．

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in W$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}) = 0, \quad f \in W^\perp$$

であるから，$\varphi(\boldsymbol{x}) \in (W^\perp)^\perp$．即ち，$W \subset (W^\perp)^\perp$ であることが分かる．さらに，

$$\dim (W^\perp)^\perp = n - \dim W^\perp = n - (n - \dim W) = \dim W$$

なので，$W = (W^\perp)^\perp$.

(4) をまず示す．$\xi' : S^* \to S$ を

$$\xi'(W') = (W')^\perp$$

で定める．$(W^\perp)^\perp = W$ より，$\xi' \circ \xi = 1_S$ となる．同様に，$\xi \circ \xi' = 1_{S^*}$ も分かる．従って，ξ, ξ' は全単射である．後半は自明．

(3) $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$, $\boldsymbol{x}_i \in W_i$, $(i=1,2)$ とすると，

$$f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = 0 + 0 = 0$$

となる．従って，$f \in (W_1+W_2)^\perp$. 一方，$W_i \subset W_1 + W_2$ であるので，$(W_1+W_2)^\perp \subset W_i^\perp$. ゆえに，$(W_1+W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp$ を得る．即ち，

$$(W_1+W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

これと (2), (4) を用いると，

$$((W_1 \cap W_2)^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2, \quad (W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = (W_1^\perp)^\perp \cap (W_2^\perp)^\perp = W_1 \cap W_2$$

となる．よって，$\xi'((W_1 \cap W_2)^\perp) = \xi'(W_1^\perp + W_2^\perp)$ となり，求める式を得る．□

12.6 演習問題

問題 12.1 以下の，$\mathbb{C}$ 係数のベクトルに対して，その長さを求めよ．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

問題 12.2 $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に *Schmidt* の直交化法を適用して，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ.

問題 12.3 V, W を計量ベクトル空間とする．(1) $f : V \to W$ が計量同型写像のとき, $f^{-1} : W \to V$ も計量同型写像となることを示せ.

(2) $f : V \to W$ 及び，$g : W \to X$ が計量同型写像のとき, $g \circ f : V \to X$ も計量同型写像となることを示せ.

問題 12.4 (1) $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \in \mathbb{R} \right\}$$

に対して, その直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

に対して, その直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

(3) (2) の部分空間 W とその直交補空間 $W^\perp$ から定まる直交射影 p_W，$p_{W^\perp}$ を考える. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して, $p_W(\boldsymbol{v})$，$p_{W^\perp}(\boldsymbol{v})$ を求めよ.

問題 12.5 (1) V を計量ベクトル空間とし, S, T をその部分集合とする. もし $S \subset T$ ならば, $S^{\perp} \supset T^{\perp}$ となることを示せ.
(2) V を計量ベクトル空間とし, S をその部分集合, また $\langle S \rangle$ を, S を含む最小の V の部分ベクトル空間とする. このとき $S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}$ となることを示せ.

問題 12.6 A を, $\mathbb{C}$ に係数を持つ n 次正方行列とする. このとき AA^* の対角成分は非負実数となることを示せ.

問題 12.7 V を計量ベクトル空間, W をその部分ベクトル空間とする. このとき $(W^{\perp})^{\perp} = W$ を示せ.

問題 12.8 計量ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_\ell}$ $(\ell \geq 2)$ に対して, 次の不等式が成立することを示せ.

$$\| \sum_{i=1}^{\ell} \boldsymbol{x_i} \| \leq \sum_{i=1}^{\ell} \| \boldsymbol{x_i} \| .$$

問題 12.9 (1) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を, 3 次正方行列

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -2 & 10 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

の左からの掛け算として定まる線型写像とする. $\mathbb{R}^3$ の基底として

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いた場合の F の表現行列 B を求めよ.
(2) V の部分ベクトル空間 W を, $W = \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$ で定めると, W と $W^{\perp}$ は線型写像 F で不変であることを示せ. すなわち, $F(W) \subset W$ 及び $F(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ を示せ.
(3) F の随伴写像 F^* の, $\mathbb{R}^3$ の基底としてともに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を用いたときの表現行列 C を求めよ.

13 固有値と固有空間

本講の目標

- 行列の**最小多項式**を理解する.
- 行列の**固有値**, **固有ベクトル**, **固有空間**を理解し計算する.
- 行列の**対角化**について理解し，対角化可能な行列を対角化する.
- 冪零行列の標準形（**Jordan 標準形**）を理解し計算する.

13.1 最小多項式

体 K 上のベクトル空間に, 積と呼ばれるもう一つの演算

$$(a, b) \mapsto ab \quad (a, b \in R)$$

が定義されていて, $a, b, c \in R$ と $\alpha \in K$ に対して

(1) $(ab)c = a(bc)$.

(2) $1 \in R$ が存在して, $1a = a1 = a$.

(3) $(a + b)c = ac + bc$.

(4) $a(b + c) = ab + ac$.

(5) $(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$

が成立するとき, R を K **多元環**, または K **代数**という.

例 13.1 以下，K 代数の例を挙げる.

(1) K 上の一変数多項式環 $K[x]$ は, 通常の積などを通して K 代数.

(2) n 次正方行列全体 $M_n(K)$ は, 行列の積に関して K 代数になる．ここで，$1 = E_n$ である.

(3) $\mathrm{End}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ は線型変換}\}$ は, 写像の合成を積とすることで K 代数になる．このとき，1 は恒等変換 id_V である.

$\phi : M_n(K) \to \mathrm{End}(K^n)$ を,

$$\phi(A) = \phi_A$$

で定める．ここで，ϕ_A は A を左から掛けることで得られる，K^n 上の線形変換である．すると，ϕ はベクトル空間の間の同型写像となり，

$$\phi(AB) = \phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B = \phi(A)\phi(B)$$

及び, $\phi(E_n) = \phi_{E_n} = 1_{K^n}$ を満たす．即ち，ϕ は K 代数としての同型写像を与える．

さて，$a \in R$ と $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_{n-i}x^i$, $\alpha_i \in K$ に対して，

$$f(a) = \alpha_0 a^n + \cdots + \alpha_{n-1}a + \alpha_n \cdot 1, \qquad (a^0 = 1 \text{ とみなす.})$$

により, 写像

$$\varphi_a : K[x] \to R$$

を定める．すると，φ_a は線型写像で, $h(x) = f(x)g(x)$ のとき,

$$\varphi_a(h(x)) = \varphi_a(f(x))\varphi_a(g(x)),$$

つまり $h(a) = f(a)g(a)$ を満たす．実際, K 代数の定義の (5) と (1) から得られる,

$$(\alpha a^\ell)(\beta a^{\ell'}) = (\alpha\beta)(a^\ell \beta^{\ell'}) = (\alpha\beta)a^{\ell+\ell'}$$

と，(3),(4) を用いることによって容易に示される．

次に，$\dim_K R < \infty$ のとき（実際は，これより弱い条件 $\dim(\mathrm{Im}\varphi_a) < \infty$ が成り立つ場合を考えればよい.），$\dim_K K[x] = \infty$ であるから，$J_a = \ker \varphi_a$ とおくと，$J_a \neq \{0\}$ である．一般に，条件

(1) $f(x), g(x) \in J \Rightarrow f(x) + g(x) \in J.$

(2) $f(x) \in J,\ h(x) \in K[x] \Rightarrow f(x)h(x) \in J.$

を満たす R の部分集合 J を, R の**イデアル**とよぶ．J_a も R のイデアルである．$f(x) \in K[x]$, $0 \neq \alpha \in K$ のとき,

$$f(x) \in J_A \iff \alpha f(x) \in J_a$$

に注意しよう．また,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

について，$a_0 = 1$ のとき $f(x)$ を**モニック (monic) な多項式**, あるいは単に，**モニック (monic)** と呼ぶ.

以下, $\dim_K R < \infty$ とする．J_a に含まれる多項式 $f(x) \neq 0$ で, 次数の一番低いもの全体を V とする．このとき, 以下が成立する.

(1) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in V$ かつ $a_0 \neq 0$ ならば，$a_0^{-1}f(x) \in V$ で, $a_0^{-1}f(x)$ は monic.

(2) V の中で monic なものは一意的.

証明 (1) は明らか．(2) については，$f(x), g(x) \in V$ がともに monic とすると, $f(x) - g(x) \in V$ なので, $f(x) - g(x) = 0$ または, $f(x) - g(x)$ の字数は $f(x)$ の次数より真に小さいはずである．よって V の定義から, $f(x) - g(x) = 0$ となり, $f(x) = g(x)$, よって V の中で monic なものは一意的. □

ここで得られた monic な多項式を $f_a(x)$ で表わし，a の**最小多項式**という.

定理 13.2 $J_a = \{\, f_a(x)h(x) \mid h(x) \in K[x] \,\}$.

証明 $g(x) \in J_a$ とする．多項式に関する剰余の定理から，

$$g(x) = f_a(x)h(x) + r(x)$$

と書ける．ここで，$r(x) = 0$ または $r(x)$ の次数は $f_a(x)$ の次数より真に小さい. もし，$r(x) \neq 0$ とすると, $0 = g(a) = f_a(a)h(a) + r(a) = r(a)$ より，$r(x) \in J_a$ となる．ところが，これは $f_a(x)$ の次数に関する仮定に反する. □

一般に，K 代数 R の元 a に対して，ある $b \in R$ が存在して, $ab = ba = 1$ となるとき, a を R の**正則元**であるという.

定理 13.3 $\dim_K R < \infty$ のとき, $a \in R$ が正則元 $\iff$ $f_a(0) \neq 0$.

証明 [$\Rightarrow$] a が正則元で $f_a(0) = 0$ とする.

$$f_a(x) = x^\ell + \alpha_1 x^{\ell-1} + \cdots + \alpha_\ell$$

とおく．$f_a(0) = \alpha_\ell = 0$ なので,

$$f_a(a) = a^\ell + \alpha_1 a^{\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell-1}a = 0.$$

$b \in R$ を，$ab = ba = 1$ なる元とするとき，b を右から掛けて,

$$a^{\ell-1} + \alpha_1 a^{\ell-2} + \cdots + \alpha_{\ell-1} = 0.$$

従って,

$$g(x) = f_a(x)/x = x^{\ell-1} + \alpha_1 x^{\ell-2} + \cdots + \alpha_{\ell-1} \in J_a$$

となり, $f_a(x)$ の次数の最小性に矛盾.

[$\Leftarrow$] a の最小多項式を

$$f_a(x) = x^\ell + \alpha_1 x^{\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell-1} a + \alpha_\ell \cdot 1$$

とおく．仮定より，$\alpha_\ell \neq 0$ である．一方,

$$0 = f_a(a) = a^\ell + \alpha_1 a^{\ell-1} + \cdots + \alpha_{\ell-1} a + \alpha_\ell \cdot 1$$

より,

$$-\alpha_\ell^{-1}(a^{\ell-1} + \alpha_1 a^{\ell-2} + \cdots + \alpha_{\ell-1} \cdot 1)a = 1$$

であるから, $b = -\alpha_\ell^{-1}(a^{\ell-1} + \alpha_1 a^{\ell-2} + \cdots + \alpha_{\ell-1} \cdot 1)$ とおけば, $ab = ba = 1$ となる．即ち，a は R の正則元である．□

$R = M_n(K)$ なる場合において，各 $A \in R$ に対して，$f_A(x) \in K[x]$ を A の**最小多項式**という.

注意 13.4 定理 *13.3* の証明について, 以下の点に注意すること：一般に,

$$\begin{array}{lcl} a \text{ が右逆元を持つ} & \underset{def}{\Longleftrightarrow} & b \in R \text{ が存在して, } ab = 1. \\ a \text{ が左逆元を持つ} & \underset{def}{\Longleftrightarrow} & b' \in R \text{ が存在して, } b'a = 1. \end{array}$$

とするとき,

$$\begin{array}{lcl} a \text{ が右逆元を持つ} & \Rightarrow & f_a(0) \neq 0 \Rightarrow a \text{ は正則元} \Rightarrow a \text{ が右逆元を持つ.} \\ a \text{ が左逆元を持つ} & \Rightarrow & f_a(0) \neq 0 \Rightarrow a \text{ は正則元} \Rightarrow a \text{ が左逆元を持つ.} \end{array}$$

より, これらの四条件はすべて同値になることがわかる．このうち，“ある $f(x) \in J_a$ が存在して $f(0) \neq 0$ ならば a が正則元” たる主張の証明は, 定理 *13.3* と同様にできる.

また，$\alpha \in K$ に対して，$f_a(x + \alpha) = g(x)$ とおき，$a - \alpha \cdot 1 = b$ とおくと，$g(b) = f_a(b + \alpha \cdot 1) = f_a(a) = 0$ となるので, $g(x) \in J_b$ となる．ここでもし $g(0) = f_a(\alpha) \neq 0$ ならば, b も正則元となる．これらをまとめて, 以下の定理を得る.

定理 13.5 $f_a(\alpha) \neq 0$ ならば, $a + \alpha \cdot 1$ は正則元である．またこの対偶を取ることで, $a + \alpha \cdot 1$ が正則元でないならば, $f_a(\alpha) = 0$ が成立する.

13.2 固有空間

体 K 上の n 次元ベクトル空間 V の線型変換 $f : V \to V$ が与えられたとする. V の部分空間が,

$$f(W) \subset W$$

を満たす（$f(X) = W$ とまでは要求しないことに注意.）とき，W を **f-不変**, あるいは **f-不変部分空間**という. V と $\{\mathbf{0}\}$ はいつも f 不変である. W が f-不変部分空間のとき，f の W への制限 f' を

$$f'(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in W)$$

と定めることで, W の線型変換 $f' : W \to W$ が得られる.

補題 13.6 V の線型変換 $f, g : V \to V$ たちが $f \circ g = g \circ f$ を満たすとき, $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Im}(g)$ はともに f-不変となる.

証明 $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Ker}(g)$ は $g(\boldsymbol{a}) = 0$ と同値. よって,

$$g(f(\boldsymbol{a})) = g \circ f(\boldsymbol{a}) = f \circ g(\boldsymbol{a}) = f(g(\boldsymbol{a})) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

なので, $\mathrm{Ker}(g)$ は f-不変.

次に, $\boldsymbol{a} \in \mathrm{Im}(g)$ をとる. 定義より，ある $\boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a} = g(\boldsymbol{b})$ と書ける. このとき,

$$f(\boldsymbol{a}) = f(g(\boldsymbol{b})) = f \circ g(\boldsymbol{b}) = g \circ f(\boldsymbol{a}) = g(f(\boldsymbol{b}))$$

となるので, $\mathrm{Im}(g)$ も f-不変. □

さて，V の線型変換 $f : V \to V$ と $\alpha \in K$ に対して，$g = \alpha \cdot \mathrm{id}_V - f$ または，$g = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n$ とおくことにより,

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \alpha \boldsymbol{x}\}, \\ V_\alpha &= \mathrm{Ker}((\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n) \end{aligned}$$

とおくと, 上の補題よりこれらは f-不変である.

補題 13.7 $W_\alpha \neq \{\mathbf{0}\} \iff \det(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f) = 0 \iff V_\alpha \neq \{\mathbf{0}\}$.

証明 $\det((\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n) = (\det(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f))^n$ より明らか. □

V の線型変換 $f : V \to V$ に対して，$\det(f - \alpha \cdot \mathrm{id}_V) = 0$ となる $\alpha \in K$ を f の**固有値**といい, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{x} \in W_\alpha$, W_α, V_α をそれぞれ**固有値 α に属する固有ベクトル, 固有空間, 弱固有空間**という.

補題 13.8 ある $\ell \geq 1$ が存在して, $\mathrm{rank} f^{\ell} = \mathrm{rank} f^{\ell+1}$ が成立しているとする．このとき

$$f^{\ell}(V) = f^{\ell+k}(V), \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

であり, 特に $\mathrm{rank} f^{\ell} = \mathrm{rank} f^{\ell+k}$, $\mathrm{Ker} f^{\ell} = \mathrm{Ker} f^{\ell+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が成立する．

証明 $f^{\ell}(V) \supset f^{\ell}(f(V)) = f^{\ell+1}(V)$ で, これらは V の部分空間である．ある ℓ に対して, $\mathrm{rank} f^{\ell} = \mathrm{rank} f^{\ell+1}$ ならば, $\dim f^{\ell}(V) = \dim f^{\ell+1}(V)$ となり，$f^{\ell}(V) = f^{\ell+1}(V)$ を得る．このとき,

$$f^{\ell+1}(V) = f(f^{\ell}(V)) = f(f^{\ell+1}(V)) = f^{\ell+2}(V)$$

であり, k についての帰納法により，$f^{\ell}(V) = f^{\ell+k}(V)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が示される．よって,

$$\mathrm{rank} f^{\ell} = \mathrm{rank} f^{\ell+k}, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

を得る．一方, $\mathrm{Ker} f^{\ell} \subset \mathrm{Ker} f^{\ell+k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ であり,

$$\dim \mathrm{Ker} f^{\ell} = n - \mathrm{rank} f^{\ell} = n - \mathrm{rank} f^{\ell+k} = \dim \mathrm{Ker} f^{\ell+k}$$

より, $\mathrm{Ker} f^{\ell} = \mathrm{Ker} f^{\ell+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が得られる．□

系 13.9 f を n 次元ベクトル空間 V 上の線型変換とするとき，ある $\ell \leq n$ が存在して, $\mathrm{rank} f^{\ell} = \mathrm{rank} f^{\ell+1}$ である．

系 13.9 を $\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f$ に適用すると, $\mathrm{Ker}((\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{\ell}) = \mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{\ell+k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ であるので,

$$V_{\alpha} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \text{ある } \ell \leq n \text{ が存在して, } (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{\ell}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

がわかる．

A を, K 成分の n 次正方行列とするとき, A は K^n の線型変換 $\phi_A : K^n \to K^n$ を定める．よって ϕ_A の固有値, 固有ベクトル, 固有空間, 弱固有空間を, それぞれ A の**固有値, 固有ベクトル, 固有空間, 弱固有空間**とよぶ．多項式

$$F_A(x) = \det(xE_n - A) = \mid xE_n - A \mid$$

を, A の**固有多項式**という．P が n 次正方行列のとき,

$$\begin{aligned} F_{P^{-1}AP}(x) &= \mid xE_n - P^{-1}AP \mid = \mid P^{-1}(xE_n - A)P \mid \\ &= \mid xE_n - A \mid = F_A(x) \end{aligned}$$

である.

V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の行列表示が A のとき, $F_A(x)$ を f の**固有多項式**という. 他の基底による行列表示が B である場合は, ある n 次正則行列 P が存在して, $P^{-1}AP = B$ となるので, 上の議論から $F_A(x) = F_B(x)$ となる. よってこの概念は基底の取り方によらない. また, 方程式

$$F_A(x) = 0$$

の根 α を f の固有値という.

注意 13.10 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$ のとき, $F_A(x) = F_{A_{11}}(x)F_{A_{22}}(x)$ である.

$F_A(x)$ は x に関する n 次の多項式で, 最高次の係数が 1, つまり monic な多項式である. K が代数閉体である場合（例えば $K = \mathbb{C}$ の場合）, $F_A(x)$ は

$$F_A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

と, 一次式の積に分解できる. このとき, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が固有値である. また,

$$F_A(x) = x^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \mid A \mid$$

である. そこで,

$$\mathrm{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn}$$

とおき, A の**トレース**という. 一方,

$$F_A(x) = x^n - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

なので, 以下が成立する.

補題 13.11

$$\mathrm{tr} A = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad \mid A \mid = \alpha_1 \cdots \alpha_n.$$

f を n 次元ベクトル空間 V 上の線型変換, α を f の固有値とし, $V' = \mathrm{Im}((\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n)$ とする.

補題 13.12 $V = V_\alpha \oplus V'$. さらに, f が定める V_α, V' 上の線型変換をそれぞれ f_1, f_2 と書くとき, $\beta \neq \alpha$ なる元 $\beta \in K$ は f_1 の固有値ではない. また, α は f_2 の固有値ではない.

証明 次元公式より，$\dim V_\alpha + \dim V' = n$ なので, $V_\alpha \cap V' = \emptyset$ を示せば良い. そこで, $\boldsymbol{a} \in V_\alpha \cap V'$ とする. すると，ある $\boldsymbol{b} \in V$ に対して，$\boldsymbol{a} = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{b})$ であり,

$$\boldsymbol{0} = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{a}) = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{2n}(\boldsymbol{b})$$

となる. 一方，$\dim V = n$ なので, $\mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{2n} = \mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n$ が成立する. よって特に，$\boldsymbol{a} = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ となる.

次に, $\beta \neq \alpha$ が f_1 の固有値とすると, ある $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V_\alpha$ が存在して, $f_1(\boldsymbol{x}) = \beta\boldsymbol{x}$ が成立する. すると $(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x} - f_1(\boldsymbol{x}) = (\alpha - \beta)\boldsymbol{x}$ であり,

$$(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{x}) = (\alpha - \beta)^n\boldsymbol{x} \neq 0$$

となり矛盾である. よって $\beta \neq \alpha$ は f_1 の固有値ではない.

最後に, α が f_2 の固有値であるとすると, ある $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in V'$ が存在して, $f_2(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$ を満たす. 定義より，ある $\boldsymbol{y} \in V$ が存在して, $\boldsymbol{x} = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{y})$ となる. 従って,

$$(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{n+1}(\boldsymbol{y}) = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となる. 一方，$\dim V = n$ より, $\mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^{n+1} = \mathrm{Ker}(\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n$ であるから, $\boldsymbol{x} = (\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となり矛盾. よって α は f_2 の固有値ではない. □

f の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とし, 固有多項式を

$$h_f(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_k)^{d_k}$$

と表す. 定義より $d_i \geq 1$ であり, かつ $d_1 + \cdots + d_k = n$ である. 今，一つの $1 \leq i \leq k$ を固定し, $\alpha = \alpha_i$ とおく. さらに $V' = \mathrm{Im}((\alpha \cdot \mathrm{id}_V - f)^n)$ とおく. V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ が V_α の基底となり, $\boldsymbol{v}_{\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V' の基底となるようにとる. すると，この基底に関する f の行列表示は,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

の形になる. A_{11} は ℓ 次正方行列, A_{22} は $(n - \ell)$ 次正方行列であり, A_{11} は f_1 の, A_{22} は f_2 の, これらの基底に関する行列表示である. よって

$$h_f(x) = F_A(x) = F_{A_{11}}(x)F_{A_{22}}(x)$$

となり, $\beta \neq \alpha$ のとき, $F_{A_{11}}(\beta) \neq 0,\ F_{A_{22}}(\alpha) \neq 0$ である. 従って

$$\begin{aligned} F_{A_{11}}(x) &= (x - \alpha_i)^{d_i}, \\ F_{A_{22}}(x) &= (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_{i-1})^{d_{i-1}}(x - \alpha_{i+1})^{d_{i+1}} \cdots (x - \alpha_k)^{d_k} \end{aligned}$$

となる．特に $\dim V_{\alpha_i} = d_i$ となる．f_2 に対して同様の議論を繰り返しあてはめることで, $V = V_{\alpha_1} \oplus V_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_k}$ と直和分解され, かつ $\dim V_{\alpha_i} = d_i$ となることがわかる．これらを定理の形で以下のようにまとめておこう．

定理 13.13 f の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とし, f の固有多項式を

$$h_f(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_k)^{d_k}$$

とおく．すると V は,

$$V = V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_k}$$

たる形に直和分解される．さらに, $\dim V_{\alpha_i} = d_i$ が成立する．

$\boldsymbol{x} \in V$ を定理 13.13 の形で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$, $\boldsymbol{v}_i \in V_{\alpha_i}$ と分解する．$\dim V_{\alpha_i} = d_i$ なので,

$$(\alpha_i \cdot \mathrm{id}_V - f)^{d_i}(\boldsymbol{x}_i) = (\alpha_i \cdot \mathrm{id}_{V_{\alpha_i}} - f_i)^{d_i}(\boldsymbol{x}_i) = \mathbf{0}$$

となる．ここで，f_i は f から定まる V_{α_i} の線型変換である．また,

$$(\alpha_i \cdot \mathrm{id}_V - f) \circ (\alpha_j \cdot \mathrm{id}_V - f) = (\alpha_j \cdot \mathrm{id}_V - f) \circ (\alpha_i \cdot \mathrm{id}_V - f)$$

であるから, 全ての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して,

$$h_f(f)(\boldsymbol{x}) = (f - \alpha_1 \cdot \mathrm{id}_V)^{d_1} \circ \cdots \circ (f - \alpha_k \cdot \mathrm{id}_V)^{d_k}(\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}$$

が成立するので, $h_f(f) = 0$ となる．従って，A を n 次正方行列とするとき, $F_A(\phi_A) = 0$ であり, よって $F_A(A) = O$ が成立する．即ち，以下の定理を得る．

定理 13.14 (Cayley-Hamilton の定理) n 次正方行列 A の固有多項式 $F_A(x)$ に対して, $F_A(A) = O$ が成立する．

13.3 行列の標準形

A を n 次正方行列とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ をその相異なる固有値全体とする．すると

$$F_A(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_k)^{d_k}$$

である．定理 13.14 から $F_A(x) \in J_A$ であるから, A の最小多項式は

$$f_A(x) = (x - \alpha_1)^{e_1} \cdots (x - \alpha_k)^{e_k}$$

とかける．ただし $0 \leq e_k \leq d_k$ である．

補題 13.15 全ての $1 \leq i \leq k$ について, $e_i \geq 1$ が成り立つ. さらに, $(A - \alpha_i E_n)^{e_i}(V_{\alpha_i}) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ.

証明 $j \neq i$ のとき, $(A - \alpha_j E_n)$ は V_{α_i} の正則線型変換である. 従って，$e_i = 0$ とすると, 各 $0 \neq \boldsymbol{x}_i \in V_{\alpha_i}$ に対して

$$
\begin{aligned}
f_A(A)(\boldsymbol{x}_i) = &(A - \alpha_1 E_n)^{e_1} \circ \cdots \circ (A - \alpha_{i-1} E_n)^{e_{i-1}} \\
&\circ (A - \alpha_{i+1} E_n)^{e_{i+1}} \circ \cdots \circ (A - \alpha_k E_n)^{e_k}(\boldsymbol{x}_i) \\
\neq &\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 一方, $f_A(A) = O$ なので, $f_A(A)(\boldsymbol{x}_i) = \mathbf{0}$ となり, これは矛盾. また, $(A - \alpha_i E_n)^{e_i}(V_{\alpha_i}) = \{\mathbf{0}\}$ は明らか. □

注意 13.16 α が A の固有値であれば, $A - \alpha E_n$ は正則ではないので, 定理 *13.5* から $f_A(\alpha) = 0$ がわかる. この事実からも, $e_i \geq 1$ は分かる.

P を n 次正則行列とする. 各 $\ell \geq 1$ に対して，$P^{-1}A^{\ell}P = (P^{-1}AP)^{\ell}$ であるので, 全ての多項式 $f(x) \in K[x]$ に対して

$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$$

となる. 従って，$J_{P^{-1}AP} = J_A$ であり, 最小多項式についても

$$f_A(x) = f_{P^{-1}AP}(x)$$

が成り立つ.

二つの n 次正方行列 A, B に対して, ある n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$, $(A = PBP^{-1})$ とかけるとき, A と B は**相似**であるという. また，A が対角行列と相似であるとき, A は**対角化可能**であるという.

さて, 以下の行列を考えよう：

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{d_1} & O & O \\ O & \ddots & O \\ O & O & \alpha_k E_{d_k} \end{pmatrix}$$

ここで $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ は B の相異なる固有値全体である. このとき

$$f_B(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)$$

となることはすぐに確かめられる. P を n 次正則行列とし, C を n 次正方行列とするとき,

$$\mathrm{Ker}(\phi_{P^{-1}CP}) = \mathrm{Ker}(\phi_{CP}) = \{P^{-1}\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(\phi_C)\}$$

である. B について, $K^n = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_k}$ であり,

$$W_{\alpha_i} = V_{\alpha_i}$$

であることはすぐにわかる. 従って，ある行列が対角化可能であれば, K^n は固有空間の直和になる.

定理 13.17 n 次正方行列 A について, 以下は同値.

(1) A は対角化可能.

(2) K^n は A の固有空間の直和.

(3) A の全ての固有値 α について, α に属する固有空間は, α に属する弱固有空間と一致.

(4) $f_A(x) = 0$ は重根を持たない.

例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して, $F_A(x) = x^2$ であり, $A \neq O$ なので, $f_A(x) = x^2$ であり, A は対角化可能ではない.

A を n 次正方行列とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ を相異なる固有値全体とする. また,

$$F_A(x) = (x - \alpha_1)^{d_1} \cdots (x - \alpha_k)^{d_k}$$

とおく. $\boldsymbol{v}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_i}^{(i)}$ を V_{α_i} の基底とすると,

$$\boldsymbol{v}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_1}^{(1)}, \boldsymbol{v}_1^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_2}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_k}^{(k)}$$

は K^n の基底となる. V_{α_i} は A-不変であったので, $P = (\boldsymbol{v}_1^1, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_1}^1, \ldots, \boldsymbol{v}_1^k, \ldots, \boldsymbol{v}_{d_k}^k)$ とおくと,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_k \end{pmatrix} \tag{12}$$

となる. ここで, A_i は d_i 次正方行列であり，$(A_i - \alpha_i E_{d_i})^{d_i} = O$ となることに注意.

さて，A を n 次正方行列で, $A^n = O$ を満たすものとする. $U_i = \mathrm{Im}(\phi_A)^i$ とおこう. すると

$$K^n = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_n = \{\boldsymbol{0}\}$$

となっている．$\dim U_i = \ell_{n-i}$ とおく．$0 = \ell_0 \leq \ell_1 \leq \cdots \leq \ell_n = n$ となっている．ここで K^n を次のように取ろう．まず $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{\ell_1}$ を U_{n-1} の基底としてとる．次にこれを拡張して, $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{\ell_2}$ が U_{n-2} の基底となるようにとる．さらにこれを拡張して $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{\ell_3}$ が U_{n-3} の基底となるようにとる．これを繰り返して, $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $U_0 = K^n$ の基底となるようにとる．$P = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ とおくと, U_i の定義から $\phi_A(U_i) \subset U_{i+1}$ なので, $P^{-1}AP$ は上半三角行列となる．従って次が得られる．

定理 13.18 A が n 次正方行列とする．このとき，ある n 次正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．ただし, $F_A(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$.

証明 (12) の A_i について, d_i 次正則行列 P_i が存在して,

$$P_i^{-1}A_iP_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & & * \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_i \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & P_k \end{pmatrix}$$

とすればよい．□

13.4 冪零行列の標準形

定理 13.18 より，任意の行列は上三角化可能であることが分かる．ここでは，冪零行列についてもう少し標準的な上三角化ができることを考える．

$f : V \to V$ を線型変換とし, $f^{\ell-1} \neq 0$, $f^\ell = 0$ とする．すると，ある $\boldsymbol{x} \in V$ が存在して, $f^{\ell-1}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$, $f^\ell(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ が成立する．このとき, 以下の補題が成立する．

補題 13.19 $\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}), \ldots, f^{\ell-1}(\boldsymbol{x})$ は一次独立である．

証明 $a_i \in K$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{i-1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

とする．ここで， $f^0 = \mathrm{id}_V$ である．すると，

$$\mathbf{0} = f^{\ell-1}\Big(\sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{i-1}(\boldsymbol{x})\Big) = \sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{\ell-1+i-1}(\boldsymbol{x}) = a_1 f^{\ell-1}(\boldsymbol{x})$$

なので, $a_1 = 0$. また,

$$\mathbf{0} = f^{\ell-2}\Big(\sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{i-1}(\boldsymbol{x})\Big) = a_2 f^{\ell-1}(\boldsymbol{x})$$

なので, $a_2 = 0$. 同様の議論を繰り返すことで, $a_1 = a_2 = \cdots = a_\ell = 0$ を得る．□

そこで，$W = \langle f^{\ell-1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle$ の基底 $f^{\ell-1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}$ に関する f の行列表示は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ 0 & 0 & \ddots & O \\ & & & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

である．V の f 不変な部分空間 U であって，$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ となるものの中で, 次元が最大のものを U とする.

補題 13.20 $U \oplus W = V$ が成り立つ.

証明 $U \oplus W \neq V$ と仮定する．すると，$\boldsymbol{y} \in V$ で, $\boldsymbol{y} \notin U \oplus W$ たる元が存在する．$f^\ell = 0$ ゆえ,

$$f^{k-1}(\boldsymbol{y}) \notin U \oplus W, \quad f^k(\boldsymbol{y}) \in U \oplus W$$

となる k が存在する．$k = \ell$ のときは, $\tilde{U} = U \oplus \langle f^{\ell-1}(\boldsymbol{y})\rangle$ とおけば,

$$f(f^{\ell-1}(\boldsymbol{y})) = f^\ell(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$$

なので, $\tilde{U}$ は f 不変である．$\boldsymbol{a} \in \tilde{U} \cap W$ とする．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \lambda f^{\ell-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{w}$ とおこう．ただし $\boldsymbol{u} \in U$, $\lambda \in K$, $\boldsymbol{w} \in W$ である．$\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u} = \lambda f^{\ell-1}(\boldsymbol{y}) \in U \oplus W$ であり, $f^{\ell-1}(\boldsymbol{y}) \notin U \oplus W$ なので, $\lambda = 0$ となる．従って，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \in U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ となり, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$. 即ち，$\tilde{U}$ は f 不変で，$\tilde{U} \cap W = \{\mathbf{0}\}$ 及び, $\dim \tilde{U} = \dim U + 1 > \dim U$ を満たすので U の次元の最大性に矛盾.

次に，$k < \ell$ とする．$f^k(\boldsymbol{y}) \in U \oplus W$ なので,

$$f^k(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{i-1}(\boldsymbol{x}), \quad a_i \in K$$

と書ける．すると

$$\mathbf{0} = f^{\ell-k}(f^k(\boldsymbol{y})) = f^{\ell-k}(\boldsymbol{u}) + \sum_{i=1}^{\ell} a_i f^{\ell-k+i-1}(\boldsymbol{x})$$

となる．よって，$i \leq k$ のとき, $\ell - k + i - 1 \leq \ell - 1$ であり, $a_i = 0$ となる．従って，

$$f^k(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u} + \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-1}(\boldsymbol{x})$$

となり,

$$f^k\Big(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x})\Big) = \boldsymbol{u}$$

となる．ここで,

$$\tilde{U} = U + \langle f^{k-1}(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x}))\rangle$$

とおく．すると,

$$f\Big(f^{k-1}\Big(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x})\Big)\Big) = f^k\Big(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x})\Big) = \boldsymbol{u} \in U$$

であるから, $\tilde{U}$ は f 不変である．一方，$\boldsymbol{a} \in \tilde{U} \cap W$ とすると,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \lambda f^{k-1}\Big(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x})\Big) = \boldsymbol{w}$$

と書ける．ここで，$\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$, $a_i \in K$ である．すると,

$$f^{k-1}(\boldsymbol{y} - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-k-1}(\boldsymbol{x})) = f^{k-1}(\boldsymbol{y}) - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i f^{i-2}(\boldsymbol{x}) \notin U \oplus W$$

より，$\lambda = 0$ となり，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ を得る．従って，上と同様の議論より，$\dim \tilde{U} > \dim U$ となり矛盾. □

この操作を繰り返すことで, f の行列表示は

$$\begin{pmatrix} J(0,\ell_1) & & O \\ & \ddots & \\ & & J(0,\ell_t) \end{pmatrix} \tag{13}$$

となる．ただし，$\ell_1 \geq \ell_2 \geq \cdots \geq \ell_t \geq 1$, $\ell_1 + \cdots + \ell_t = n\,(= \dim V)$ であり，各 $J(0,\ell_i)$ は

$$J(0,\ell_i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

で定義される ℓ_i 次正方行列である．(13) は

$$J(0,\ell_1)\oplus J(0,\ell_2)\oplus\cdots\oplus J(0,\ell_t)$$

とも表わされ，これを，$J(0,\ell_1),\dots,J(0,\ell_t)$ の**直和**という．

一般に，$\alpha\in K$ に対して，l 次正方行列

$$J(\alpha,\ell)=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & & O\\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ O & & & \alpha\end{pmatrix}$$

を **Jordan 行列**という．明らかに，

$$\mathrm{rank}(J(\alpha,t)-\alpha E_\ell)^k=\begin{cases}\ell-k, & k\le\ell\\ 0, & k>\ell\end{cases}$$

が成り立つ．

注意 13.21 f_{V_α} の行列表示は，$J(\alpha,\ell_1)\oplus\cdots\oplus J(\alpha,\ell_k)$，$\ell_1\ge\ell_2\ge\cdots\ge\ell_k$ と相似であり，$\ell_1,\dots,\ell_k$ は一意的である．

定理 13.22 任意の n 次正方行列 A は *Jordan* 行列の直和と相似である．この直和は順序を除いて一意的である．

13.5 演習問題

問題 13.1 以下の複素係数行列に関して，固有多項式，固有値及び，固有空間の基底を一組求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&-1\\0&0&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&4&1\\2&-4&0\end{pmatrix}$$

問題 13.2 2 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&5\end{pmatrix}$$

を考える．

(1) A の固有値，及び固有空間の基底を一組求めよ．

(2) A 対角化せよ．

(3) 任意の自然数 $n\ge 1$ に対して，A^n を求めよ．

問題 13.3 n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して, 以下の等式が成立しているものとする：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (\text{全ての } 1 \leq i \leq n \text{ に対して})$$

このとき A は 1 を固有値として持つことを示せ.

問題 13.4 A が複素数を成分に持つ行列のとき，AA^* の固有値は負でない実数になることを示せ.

問題 13.5 実数列全体のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間を S とおく.

$$V = \{\{a_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\}$$

とおくと，V は数列空間 S の部分空間である．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) $\{x_n\}, \{y_n\} \in V$ を，

$$(x_1, x_2) = (1, 0), \quad (y_1, y_2) = (0, 1)$$

なる元とするとき，$\{x_n\}, \{y_n\}$ は V の基底になることを示せ.

(2) V 上の線型変換 $F : V \to V$ を

$$F(\{a_n\}) = \{a_{n+1}\}$$

で定める．このとき，F を V の基底 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に関して行列表示せよ.

(3) F の固有値，及び固有空間の基底を一組求めよ.

問題 13.6 A を複素係数 n 次正方行列で，$A^2 = A$ を満たす行列とする．このとき，以下を示せ.

(1) A の固有値は 0 または 1 である.

(2) $\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(f_A) \oplus \mathrm{Im}(f_A)$.（ヒント：任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x}$ なる分解を考えよ.）

(3) A は対角化可能である.

問題 13.7 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して，以下の問いに答えよ.

(1) $AB = BA$ を示せ.

(2) A と B を同時対角化せよ．即ち，ある正則行列 P で，$P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ がともに対角行列となるような P を一つ求めよ.

問題 13.8 以下の複素係数正方行列の固有多項式，及び最小多項式を計算せよ．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし，a は複素数.

問題 13.9 A を n 次正方行列で，$A^3 = A$ をみたすものとする．

(1) A の固有値は $0, \pm 1$ のいずれかであることを示せ.

(2) A は対角化可能であることを示せ.

(3) A の固有多項式を $F_A(x) = x^k(x-1)^l(x+1)^m$ とするとき，

$$\operatorname{rank} A, \quad \operatorname{rank}(A - E_n), \quad \operatorname{rank}(A + E_n)$$

を k, l, m を用いて表せ.

問題 13.10 A を複素係数 n 次正方行列で，$A^3 = A^2$ をみたすものとする．

(1) A の固有値は $0, 1$ のいずれかであることを示せ.

(2) A が対角化不可能であるとする．このとき，$\det A = 0$ を示せ.

(3) A は対角化可能であるとする．$\operatorname{Tr} A$ が最大，または最小となるときの A を求めよ．

問題 13.11 $n \geq 2$ に対して，全ての成分が 1 であるような n 次正方行列を A とする．即ち，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

である．

(1) A の固有値及び，固有多項式を求めよ．

(2) A の最小多項式を求めよ．

(3) A の各固有値に属する固有空間の基底を求めよ．

14 正規変換

14.1 正規変換の固有値，固有空間

$K = \mathbb{C}$ とし, V を計量ベクトル空間, $f : V \to V$ を線型変換とする.

(1) V の部分ベクトル空間 W が f 不変とすると, $W^\perp$ は f^* 不変となる. 実際,

$$\boldsymbol{x} \in W^\perp \iff \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \ (\forall \boldsymbol{y} \in W) \iff \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ. よって $f(\boldsymbol{y}) \in W$ より, $\boldsymbol{y} \cdot f^*(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるので, $f^*(\boldsymbol{x}) \in W^\perp$ を得る.

(2) f が**正規変換**であるとは, $f^* \circ f = f \circ f^*$ であるときにいう. このとき特に,

$$f^* \circ (f - \alpha \cdot \mathrm{id}_V) = (f - \alpha \cdot \mathrm{id}_V) \circ f^*$$

が成り立つ. ゆえに，$W_\alpha = \mathrm{Ker}(f - \alpha \cdot \mathrm{id}_V)$ は f^* 不変である.

(3) α を f の固有値とし, f が正規変換であるとする. このとき, $V = W_\alpha \oplus W_\alpha^\perp$ となる, f 不変な直和分解が存在する. 実際, W_α は f 及び f^* 不変なので, $W_\alpha^\perp$ は f^* 及び $(f^*)^* = f$ 不変である.

(4) α, β が正規変換 f の相異なる固有値とすると, $W_\beta \subset W_\alpha^\perp$ が成り立つ. 実際, $\boldsymbol{a} \in W_\beta$ をとり, 上で見た直和分解を用いて $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1 \in W_\alpha$, $\boldsymbol{a}_2 \in W_\alpha^\perp$ と分解しておこう. すると

$$\beta \boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}_1) + f(\boldsymbol{a}_2) = \alpha \boldsymbol{a}_1 + f(\boldsymbol{a}_2)$$

となる. これを

$$\beta \boldsymbol{a} = \beta \boldsymbol{a}_1 + \beta \boldsymbol{a}_2$$

と比較すれば, $\alpha \boldsymbol{a}_1 = \beta \boldsymbol{a}_1$, $\beta \boldsymbol{a}_2 = f(\boldsymbol{a}_2)$ が成り立つことが分かる. $\alpha \neq \beta$ より, $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ となり, 題意が成立する.

(5) f を正規変換とし, α を f の固有値とする. このとき，$f^*(W_\alpha^\perp) \subset W_\alpha^\perp$ が成り立つ. よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W_\alpha^\perp$ に対して $\boldsymbol{a} \cdot f^*(\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$ であるから，$(f^*|_{W_\alpha^\perp}) = (f|_{W_\alpha^\perp})^*$ が成り立つ. ゆえに f の定める $W_\alpha^\perp$ の線型変換も正規変換となる.

これらをまとめて, 以下の定理を得る.

定理 14.1 f が V の正規変換のとき, V の正規直交基底が存在して, この基底に関する f の行列表示が対角行列となる.

定理の証明は, 上の (3) と (5) を用いた $\dim V$ に関する帰納法となる.

系 14.2 A が正規行列のとき，あるユニタリー行列 U が存在して，U^*AU が対角行列となる.

(6) A が正規行列のとき,

$$A \text{ がエルミート行列} \iff \text{固有値がすべて実数.}$$
$$A \text{ がユニタリー行列} \iff \text{固有値の絶対値がすべて } 1.$$

証明 系 14.2 より, あるユニタリー行列 U が存在して, U^*AU が対角行列となる. $(U^*AU)^* = U^*A^*U$ に注意すると,

$$A = A^* \iff (U^*AU)^* = U^*AU,$$
$$A^*A = E_n \iff (U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*AU = U^*U = E_n$$

より, 明らか. □

A を正規行列とし, A の成分がすべて実数とする．即ち，$A = \overline{A}$ となっている．すると無論, その固有多項式は

$$F_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

となる．$F_A(\alpha) = 0$ ならば,

$$F_A(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_n = \overline{F_A(\alpha)} = 0$$

となる．そこで，$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ に注意して，$\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と考えよう．α を A の固有値で, $\alpha \neq \overline{\alpha}$ なるものとする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\overline{A\boldsymbol{x}} = \overline{A}\overline{\boldsymbol{x}} = A\overline{\boldsymbol{x}}$ より, $\boldsymbol{x} \in W_\alpha$ であれば

$$A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{A\boldsymbol{x}} = \overline{\alpha}\,\overline{\boldsymbol{x}}$$

が成り立つ．ゆえに $\boldsymbol{x} \in W_\alpha \iff \overline{x} \in W_{\overline{\alpha}}$ となっている．これより,

$$\dim W_\alpha = \dim W_{\overline{\alpha}}, \quad \boldsymbol{x} \perp \overline{\boldsymbol{x}}$$

が従う.

一方，$\alpha = \beta + \sqrt{-1}\gamma \in \mathbb{C}$, $(\beta, \gamma \in \mathbb{R})$ とする．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \sqrt{-1}\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$, $(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n)$ とおくと, $\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} - \sqrt{-1}\boldsymbol{z}$ となっている．また

$$(\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}}) \cdot (\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$$

が成り立つ．ここで

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} + \overline{\boldsymbol{x}}),\ \boldsymbol{z} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})$$

であり，$\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{z}$ がわかる．一方,

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} = (\beta\boldsymbol{y} - \gamma\boldsymbol{z}) + \sqrt{-1}(\gamma\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}) = A\boldsymbol{y} + \sqrt{-1}A\boldsymbol{z}$$

より,

$$A\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y} - \gamma\boldsymbol{z},\ A\boldsymbol{z} = \gamma\boldsymbol{y} + \beta\boldsymbol{z}$$

となり,

$$(A\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{pmatrix}$$

がわかる．上の議論から, A が実数成分の正規行列ならば, ある直交行列 U が存在して, ${}^tUAU$ が実数成分の対角行列と, $\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ -\gamma & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列の直和となるようにできる．このとき,

$$\begin{aligned}
{}^tU = U \quad &\Rightarrow \quad \text{対角行列.} \\
{}^tU = -U \quad &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \gamma_k \\ -\gamma_k & 0 \end{pmatrix}. \\
{}^tUU = E_n \quad &\Rightarrow \quad D(\theta_1) \oplus \cdots \oplus D(\theta_k) \oplus E_r \oplus (-E_{r'}),\ D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．

14.2 対称双一次形式と二次形式

K を, 標数が 2 ではない体とする．即ち，$2^{-1} \in K$ とする．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$$

と, K 成分の n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ に対して, 写像 $B : K^n \times K^n \to K$ を,

$$B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y}$$

で定める．このとき B は次の性質をもつ：$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y} \in K^n,\ \alpha \in K$ に対して,

(1) $B(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + B(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$.

(2) $B(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(3) $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

実際 (3) は, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in K$ なので, $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {}^tB(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ に注意して,

$$B(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x} = {}^t({}^t\boldsymbol{y}A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{y} = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

から従う. $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすると,

$$q(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

となり, $x_1,\ldots,x_n$ を変数と考えると, 2 次の項ばかりからなる多項式となるので, これを変数 $x_1,\ldots,x_n$ についての**二次形式**という. 一方, (1), (2) より, $\boldsymbol{y}$ を固定して,

$$h_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

とすると, $h_{\boldsymbol{y}}$ は線型写像 $K^n \to K^n$ を定める. また, (3) を用いると, $\boldsymbol{x}$ の方を固定しても

$$h'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

は線型写像 $K^n \to K^n$ を定める. (3) は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ についての対称性を表しているので, このような B を**対称双一次形式**という. 一般に体 K 上のベクトル空間 V に対して, $f : V \times V \to K$ が $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b} \in V$ と $\alpha \in K$ に対して,

(1) $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b})$.

(2) $f(\alpha\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \alpha f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

(3) $f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$.

を満たすとき, **対称双一次形式**という.

$\dim V = n$ で, $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ が V の基底の時,

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{v}_i,\ \ \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{v}_j \in V$$

に対して (1), (2), (3) を用いると,

$$f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \sum_{i,j} a_ib_jf(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)$$

となり, $A = (f(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j))$ とすれば

$$f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}A\boldsymbol{b}$$

となる．${}^tA = A$ に注意．この A を，基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する f の**表現行列**という．$q(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ とおくと，

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= q(\boldsymbol{a}) + q(\boldsymbol{b}) + 2f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

よって，

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{2}(q(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - q(\boldsymbol{a}) - q(\boldsymbol{b})) \tag{14}$$

となる．$q : V \to K$ を f **が定める二次形式**という．式 (14) から以下を得る．

定理 14.3 f, f' が V 上の対称双一次形式，q, q' を f, f' の定める二次形式とする．このとき，$f = f' \iff q = q'$.

$V = V_1 \oplus V_2$ で，$\boldsymbol{a} \in V_1$, $\boldsymbol{b} \in V_2$ のとき，$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ とする．V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ が V_1 の基底，$\boldsymbol{v}_{\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V_2 の基底となるようにとる．すると

$$f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0, \quad (1 \leq i \leq \ell,\ \ell+1 \leq j \leq n)$$

となるので，表現行列は ℓ 次正方行列 A_{11} と $(n-\ell)$ 次正方行列 A_{22} により，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

たる形となる．f は V_1, V_2 の対称双一次形式 f_1, f_2 を定めており，f_1 の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_\ell$ に関する表現行列が A_{11}, f_2 の基底 $\boldsymbol{v}_{\ell+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する表現行列が A_{22} である．

対称双一次形式 $f : V \times V \to K$ に対して，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を定めると，n 次対称行列 $A = (a_{ij})$ が $a_{ij} = f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$ で定まる．n 次正則行列 P による線型変換 $\boldsymbol{x}' = P\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}' = P\boldsymbol{y}$ によって，

$${}^t\boldsymbol{x}' A \boldsymbol{y}' = {}^t\boldsymbol{x}\, {}^tPAP\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}({}^tPAP)\boldsymbol{y}$$

なので，表現行列は A から ${}^tPAP$ へ変わる．このとき，A と ${}^tPAP$ は**同値**であるという．$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tPAP)$ なので，この階数を f **の階数**という．

定理 14.4 n 次元ベクトル空間 V 上の対称双一次形式 f が与えられたとき，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で，$f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ $(i \neq j)$ たるものが存在する．

証明 n についての帰納法を用いる．$n = 1$ あるいは $f = 0$ ならば自明．$f \neq 0$ ならば，f の定める二次形式 q についても $q \neq 0$．そこで，$q(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \neq 0$ となる $\boldsymbol{a} \neq 0$ をとる．$f(\boldsymbol{a}, \cdot) : V \to K$ は零写像でないから，

$$W = \{\boldsymbol{y} \in V \mid f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) = 0\}$$

とおくと, $\dim W = n-1$ である.

$$\boldsymbol{x} = \frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{q(\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} + \Bigl(\boldsymbol{x} - \frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{q(\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}\Bigr)$$

で,

$$f\Bigl(\boldsymbol{x} - \frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{q(\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\Bigr) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) - \frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{q(\boldsymbol{a})}f(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = 0$$

となる. 従って,

$$\boldsymbol{x} - \frac{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})}{q(\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} \in W$$

なので, $V = \langle \boldsymbol{a} \rangle \oplus W$ である. 帰納法の仮定により, f の W への制限については, 基底 $\boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が存在して, $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ $(i \neq j)$ となるようにとれる. ここで $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a}$ とおけば, 条件を満たす基底がとれたことになる. □

注意 14.5 $\mathrm{rank}(f) = r$ のとき, $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) \neq 0$, $i \geq r$, $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 0$, $i > r$ となるように基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ をとれる. また, $K = \mathbb{C}$ のとき, $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 1$, $(i \leq \mathrm{rank}(f))$, $f(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 0$, $(i \geq \mathrm{rank}(f))$ となるようにとれる.

実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_b & & & \\ & & & 0 & & \\ & & O & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

について, $\lambda_1, \dots, \lambda_a > 0$, $\lambda_{a+1}, \dots, \lambda_b < 0$ とする.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & & \\ & & \sqrt{\lambda_a} & & & & & & \\ & & & \sqrt{-\lambda_{a+1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{-\lambda_b} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & O & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$${}^tP \begin{pmatrix} E_a & & & & O \\ & -E_{b-a} & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P = A$$

となる．数の組 $(a, b-a)$ を A **の符号数**という．B が A と同値な実対称行列ならば, A の符号数と B の符号数は等しい (**Sylvester の慣性法則**)．これを以下で証明しよう．

B の符号数が $(c, d-c)$ であるとする．$b = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = d$ である．A が基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に関する表現行列, B が基底 $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ に関する表現行列とする．$c > a$ と仮定しよう．

$$W_1 = \langle \boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_c \rangle,\ W_2 = \langle \boldsymbol{v}_{a+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とする．$\dim W_1 + \dim W_2 = c + (n-a) = n + (c-a) > n$ なので, $W_1 \cap W_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$ となる．$\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ をとると, $\boldsymbol{x} \in W_1$ から $q(\boldsymbol{x}) > 0$. また $\boldsymbol{x} \in W_2$ なので, $q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ となり, これは矛盾. □

実二次形式 $q : V \to \mathbb{R}$ はすべての $\boldsymbol{x} \in V, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して, $q(\boldsymbol{x}) > 0$ のとき, **正値**といい, $q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ のとき**半正値**という．

14.3 演習問題

問題 14.1 3 次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値と各固有値に属する固有空間を求めよ．

(2) A を直交行列を用いて対角化せよ．

(3) 自然数 $n \geq 1$ に対して，A^n を計算せよ．

問題 14.2 3 次正規行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) A の固有値と各固有値に属する固有空間を求めよ．

(2) $\mathbb{C}^3$ の *1* 次元部分空間で，A の不変部分空間となるものを全て求めよ．

問題 14.3 (1) A を n 次直交行列で $\mathrm{det}A = -1$ とする．このとき，A は -1 を固有値に持つことを示せ．また，n が偶数であれば 1 も A の固有値であることを示せ. (ヒント：

$${}^tA(-E_n - A) = {}^t(-E_n - A), \quad {}^tA(E_n - A) = -{}^t(E_n - A)$$

を使え.)

(2) A を 2 次直交行列で $\mathrm{det}A = -1$ なるものとする．このとき，負でない整数 $m \geq 0$ に

対して $\mathrm{tr}(A^m)$ を計算せよ.

(3) A を 2 次直交行列で $\det A = -1$ なるものとする．このとき，A は $A^2 = E_2$ を満たすことを示せ.

問題 14.4 A を 3 次実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

(1) A の固有値は相異なる実数である．これを求めよ.

(2) A の固有値を，$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ とする．$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ で，各 $\boldsymbol{p}_i$ が α_i の固有ベクトルとなるものを一組求めよ.

(3) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\alpha_1 \parallel \boldsymbol{x} \parallel^2 \leq \ {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} \ \leq \ \alpha_3 \parallel \boldsymbol{x} \parallel^2$$

が成り立つことを示せ.（ヒント：$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + x_3\boldsymbol{p}_3$ とおいて，${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を計算してみよ.）

問題 14.5 3 次正規行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である.

(1) A の固有値，固有空間の基底を一組求めよ.

(2) A をユニタリー行列で対角化せよ.

問題 14.6 A を 2 次の実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) A は相異なる正の実数からなる固有値を持つ．これを $\alpha_1 < \alpha_2$ とおく．A をある直交行列 P を用いて，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

なる形に対角化せよ.

(2) (1) で用いた P に対して，

$$H_1 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad H_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

とおく．このとき，

$$H_i^2 = H_i,\ \ (i = 1,\, 2), \qquad H_1H_2 = H_2H_1 = O$$

となることを示せ.

(3)　任意の自然数 $m \geq 1$ に対して，

$$X = \sqrt[m]{\alpha_1}H_1 + \sqrt[m]{\alpha_2}H_2$$

とおく．このとき，X^m を A を用いて表せ.

15　いくつかの応用

15.1　代数学の基本定理

この小節では，次の有名な定理を証明する．

定理 15.1 (代数学の基本定理) 複素係数 1 変数 n 次多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{C}$$

を考える．このとき，ある $u \in \mathbb{C}$ が存在して，$f(u) = 0$ となる．

証明 実数 $L > 0$ に対して，

$$M_L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq L,\ |y| \leq L\}$$

とおく．$\{q_n = (x_n, y_n)\}$ を M_L の点列とする．このとき，ある自然数の列

$$1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$$

が存在して，数列 $\{x_{n_i}\}$ 及び，$\{y_{n_i}\}$ は収束する．実際，有界な実数列は収束する部分列を含むので，数列 $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n'_j}\}$ を含む．一方，$\{y_{n'_j}\}$ は有界な実数列ゆえ収束する部分列 $\{y_{n_i}\}$ を含む．このとき，$\{x_{n_i}\}$ は収束列 $\{x_{n'_j}\}$ の部分列であるから収束する．

(I) $f : M_L :\to \mathbb{R}$ を連続函数とする．すると，f は最大値，最小値を持つ．

(1) $f(M_L)$ は有界である．
$f(M_L)$ が有界でないと仮定する．すると，全ての $N \geq 1$ に対して，$f(q_N) > N$ となる点 $q_N \in M_L$ が存在する．そこで，$\{q_N\}$ の収束する部分列 $\{q_{N_i}\}$ をとり，
$q_{N_i} \to q, (i \to \infty)$ とする．すると，

$$f(q_{N_i}) \to f(q) \in f(M_L), \quad (i \to \infty)$$

であるが，各 $i \geq 1$ に対して，$f(q_{N_i}) > N_i \geq i$ であるから，$f(q_{N_i}) \to \infty$ となり矛盾である．

(2) $\sup f(M_L) = \alpha$ とおく．すべての自然数 N に対して，

$$\alpha - \frac{1}{N} < f(q_N) \leq \alpha$$

となる，q_N が存在する．そこで，$\{q_N\}$ の収束する部分列 $\{q_{N_i}\}$ をとり，$q_{N_i} \to q$, $(i \to \infty)$ とする．すると，

$$f(q_{N_i}) \to f(q) \in f(M_L), \quad (i \to \infty)$$

であるが，全ての N に対して，

$$\alpha - \frac{1}{N} < f(q) \leq \alpha$$

であるから，はさみうちの原理より $f(q) = \alpha$ である．従って，α は f の最大値である．

(II) 各 $x \in \mathbb{C}$ に対して，$F(x) = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0|$ により，連続函数 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を定義する．

十分大きな $R > 1$ に対して，$|x| > R$ であれば，$F(x) > F(0)$ である．実際，

$$\begin{aligned} |a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}| &\leq |a_1||x|^{-1} + |a_2||x|^{-2} + \cdots + |x|^{-n} \\ &\leq (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)|x|^{-1}, \quad (|x| > 1 \text{ に注意.}) \end{aligned}$$

より，R が十分大きければ，$|x| > R$ のとき，

$$\frac{|a_0|}{2} > |a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}|$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} F(x) &= |a_0 + a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}| \\ &\geq ||a_0| - |a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}|| \qquad (|\alpha + \beta| \geq ||\alpha| - |\beta|| \text{ を用いる.}) \\ &> \frac{|a_0|}{2}|x|^n \\ &> |x|^n|a_1x^{-1} + \cdots + a_nx^{-n}| = |a_1x^{n-1} + \cdots + a_n| \\ &\geq |a_1||x|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}||x| + |a_n| \\ &> |a_n| = F(0) \qquad\qquad (|x| > 1 \text{ に注意.}) \end{aligned}$$

を得る．

(III) 実平面 $\mathbb{R}^2$ と複素平面を標準的に同一視するとき，$M_R \subset \mathbb{C}$ とみなすことができ，特に，

$$\{x \in \mathbb{C} \,|\, |x| \leq R\} \subset M_R$$

である．今，$x = p \in M_R$ で F が M_R 上の最小値 α をとったとすると，$\alpha = F(p) \leq F(0)$ である．ゆえに，(II) の議論から，α は F の $\mathbb{C}$ 上の最小値であることが分かる．そこで，

F が $\mathbb{C}$ 内に根を持たないと仮定すると，$\alpha > 0$ である．実際，$\alpha < 0$ とすると，(II) の議論から，$|x|$ が十分大きければ $F(x) > 0$ である．従って，中間値の定理よりある $x = p'$ が存在して，$F(p') = 0$ となり矛盾である．

さて，

$$g(x) = F(x+p) = a_0(x+p)^n + \cdots + a_{n-1}(x+p) + a_n$$

とおくと，$|g(x)|$ は $x = 0$ で最小値 α をとる．そこで，

$$g(0) = a_0p^n + \cdots + a_{n-1}p + a_n \neq 0$$

に注意して，

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(0)}$$

とおく．すると，$h(0) = 1$ ゆえ，

$$h(x) = 1 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

とかける．$b_1, \ldots, b_n$ のうち，0 でないものの中で最初のものを b_s とし，

$$K = \max\{|b_{s+1}|, \ldots, |b_n|\}$$

とする．このとき，$r > 0$ を十分小さくとると，

$$1 - |b_s|r^s > 0, \quad 0 < |b_s|r^s - \frac{Kr^{s+1}}{1-r} = \left(\frac{|b_s| - Kr}{1-r}\right)r^s < 1$$

と出来る．そこで，

$$\arg b_s = \theta, \quad q = r\left(\cos\frac{\pi-\theta}{s} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi-\theta}{s}\right)$$

とおくと，

$$\arg b_sq^s = \theta + (\pi - \theta) = \pi, \quad b_sq^s = -|b_s|r^s$$

である．このとき，

$$\begin{aligned}
|h(q)| &= |1 + b_sq^s + b_{s+1}q^{s+1} + \cdots + b_nq^n| \\
&\leq |1 + b_sq^s| + |b_{s+1}||q|^{s+1} + \cdots + |b_n||q|^n \\
&\leq |1 - |b_s|r^s| + K|q|^{s+1} + \cdots + K|q|^n \\
&\leq 1 - |b_s|r^s + \frac{Kr^{s+1}}{1-r} < 1
\end{aligned}$$

となる．ところが，$|h(q)| = |F(p+q)/F(p)|$ であったから，

$$F(p+q) < F(p)$$

となり，$F(p) = \alpha$ の最小性に矛盾する．□

15.2　1 変数有理函数体への応用

$K(t)$ を t を変数とする K 係数有理函数全体のなす体とする．これを 1 **変数有理函数体**という．明らかに，

$$K \subset K[t] \subset K(t)$$

である．

P を n 次正則行列，C を n 次正方行列とする．すると，

$$F_{P^{-1}CP}(x) = F_C(x)$$

であるので，$C = PA$ とおくと，

$$P^{-1}(PA)P = (P^{-1}P)aP = AP$$

より，

$$F_{AP}(x) = F_{PA}(x)$$

であることが分かる．

次に，P が正則でないときを考える．$P_t = tE_n + P$ とおくと，$P_t \in M_n(K(t))$ であり，

$$\begin{aligned} |P_t| &= t^n + (t \text{ の } n-1 \text{ 次以下の多項式}) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

である．従って，P_t は正則行列となる．一方，$F_{AP_t}(x)$ と $F_{P_tA}(x)$ は x と t の 2 変数多項式であり，$F_{AP_t}(x) = F_{P_tA}(x)$ である．ここで，$t = 0$ を代入すると，$P_0 = P$ に注意して，$F_{AP}(x) = F_{PA}(x)$ が得られる．よって次の定理を得る．

定理 15.2 n 次正方行列 A, P に対して，

$$F_{AP}(x) = F_{PA}(x)$$

が成り立つ．

注意．上の議論において，$t = 0$ を代入してよいことは，K が $K(t)$ の部分体であり，$F_{AP_t}(x)$ と $F_{P_tA}(x)$ が x と t の多項式であることから導かれることに注意されたい．

次に，余因子行列に関して以下の定理を示そう．

定理 15.3 A, B を n 次正方行列としたとき，A, B の余因子行列 $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ に関して，

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$$

が成り立つ．

証明 $A_t = tE_n + A$, $B_t = tE_n + B$ とおく．$\widetilde{A_t}$, $\widetilde{B_t}$ は t の 1 変数多項式を成分とする n 次正方行列である．さて，A_t, B_t は正則行列なので，

$$\widetilde{A_t} = \frac{1}{|A_t|}A_t^{-1}, \quad \widetilde{B_t} = \frac{1}{|B_t|}B_t^{-1}$$

であり，

$$\widetilde{A_t B_t} = \frac{1}{|A_t B_t|}(A_t B_t)^{-1} = \widetilde{B_t}\widetilde{A_t}$$

となる．これは，$K[t]$ を成分とする行列としての等式である．ゆえに，$t = 0$ を代入して求める式を得る．□

15.3 部分体と最小多項式

K を体とする．$k \subset K$ が $0, 1 \in k$ で，K の演算に関して体になっているとき，k を K の**部分体**という．($0, 1 \in k$ で，$a, b \in k$ ならば $a - b \in k$ であること，及び，$a, b \in k$ かつ $n \neq 0$ のとき，$ab^{-1} \in k$ であることが成り立つとき，k は K の部分体である．)

例 15.4 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ において，いずれも，左辺は右辺の部分体である．

体 K は，任意の K 係数多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad n \geq 1,\ a_i \in K,\ a_0 \neq 0$$

に対して，ある $\alpha \in K$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となるとき，**代数閉体**であるという．このとき，ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ が存在して

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

とかける．また，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は順序を除いて一意的である．

例 15.5 $\mathbb{C}$ は代数閉体である．(代数学の基本定理)

注意 15.6 一般に，体 K に対して K を部分体として含むような代数閉体 K' が存在することが知られている．

k が K の部分体のとき，$k^n \subset K^n$ であり，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l \in k^n$ が k^n のベクトルとして一次独立であるということと，K^n のベクトルとして一次独立であるということは同値である．また，$A, B \in M_n(k)$ について，積 AB や，行列式 $|A|$ は $M_n(k)$ で考えても $M_n(K)$ で

考えても同じ値になる．よって，各 $f(x) \in k[x]$ に対して，$f(A)$ は k 上で考えても K 上で考えても同じ多項式になる．従って，$A \in M_n(k)$ について Cayley-Hamilton の定理

$$F_A(A) = O$$

を思い出すと，$A \in M_n(K)$ とみなしても $F_A(A) = O$ となることが分かる．

さて，$A \in M_n(k)$ に対して，A の最小多項式 $f(x)$ の次数を l とする．l は，$E_n, A, \ldots, A^{l-1}$ が $M_n(k)$ の元として，従って $M_n(K)$ の元として一次独立であり，$E_n, A, \ldots, A^{l-1}, A^l$ が一次従属となる自然数として特徴づけられる．従って，

$$a'_0 E_n + \cdots + a'_l A^l = O$$

となる，$a'_0, \ldots, a'_l \in K$, $a'_l \neq 0$ が存在する．そこで，$a_j = a'_j / a'_l$, $1 \leq j \leq l-1$ とおくと，

$$a_0 E_n + \cdots + a_{l-1} A^{l-1} + A^l = O$$

となる．従って，

$$f(x) = x^l + a_{l-1} x^{l-1} + \cdots + a_0 \in k[x] \subset K[x]$$

となり，A の最小多項式は k 上で考えても K 上で考えても一致することが分かる．

16　参考例題その 2

例題 16.1 (1)　$\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2)　シュミットの直交化法を用いて, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ を正規直交化せよ.

(3)　(2) で得られた正規直交基底を $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ とする．$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ について, $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3$ と書いたとき, その係数 a_1, a_2, a_3 を求めよ.

解答. (1)　$\mathbb{R}^3$ はにおける 3 つのベクトルを考えているので, 与えられたベクトルたちが一次独立であることを示せばよい. そのためには, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ を並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

の行列式が 0 でないことを示せばよい. すると, $\det(A) = -30 \neq 0$ となり, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ は一次独立であることが分かる.

(2)　まずシュミットの直交化法で直交化する. $\boldsymbol{x}_2$ に適用すると,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_2' &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{x}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

同様に $\boldsymbol{x}_3$ に対しては,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_3' &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{x}_1}{\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{x}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3 \cdot \boldsymbol{x}_2'}{\boldsymbol{x}_2' \cdot \boldsymbol{x}_2'}\boldsymbol{x}_2' \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{6}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よってこれらを単位ベクトル化することで得られる正規直交基底は,

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

である.

(3) $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{y}_1 + a_2\boldsymbol{y}_2 + a_3\boldsymbol{y}_3$ と書いたとき, これと $\boldsymbol{y}_i$ との内積を取ると, 直交性より $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{y}_i = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ となっている. よってこれを計算して,

$$a_1 = \frac{13}{\sqrt{5}},\ a_2 = \frac{28}{\sqrt{6}},\ a_3 = -\frac{4}{\sqrt{30}}$$

が得られる. □

例題 16.2 (1) $V = \mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が, $\mathbb{R}$ 上生成する V の部分ベクトル空間

$$W = \mathbb{R}\boldsymbol{v} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}r\\r\end{pmatrix}\middle| r \in \mathbb{R}\right\}$$

に対して, その直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

(2) (1) で求めた $V = W \oplus W^\perp$ たる直交分解と, これから定まる W への直交射影と $W^\perp$ への直交射影をそれぞれ p_W, $p_{W^\perp}$ とおく. V のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ に対して, 射影 $p_W(\boldsymbol{x})$ と $p_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

解答. (1) V は二次元, W は一次元より, $W^\perp$ は一次元. よって W に入らないベクトルを持ってきて, それをシュミットの直交化法などを用いて直交化すればよい. ただし今回は二次元なので, そのようなベクトルを見つけることは直接できて, たとえば $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ が $W^\perp$ の正規直交基底.

(2)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = a\boldsymbol{y}_1 + b\boldsymbol{y}_2 = a\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

とおいて a, b についてとくと, $a = \frac{11}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ となる. よって

$$\boldsymbol{x} = \frac{11}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{y}_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{y}_2$$

となることがわかるので, 直交射影の定義から

$$\begin{aligned} p_W(\boldsymbol{x}) &= \frac{11}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{y}_1 = \frac{11}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \\ p_{W^\perp}(\boldsymbol{x}) &= -\frac{3}{2}\sqrt{2}\boldsymbol{y}_2 = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

となる. □

例題 16.3 複素係数正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して，それぞれ固有値，及び固有空間の基底を一組求めよ．ここで，a は複素数である．

解答 (1) A について．固有多項式については定義に基づいて計算し，

$$F_A(x) = (x+1)^2(x-5)$$

を得る．従って，A の固有値は $-1, 5$.
固有値 -1 に対する固有空間 $W_{-1}(A)$ は，連立方程式 $(A+E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり，

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$W_{-1}(A)$ は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とする 2 次元の部分空間である．
一方，固有値 5 に対する固有空間 $W_5(A)$ は，連立方程式 $(A-5E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり，

$$A - 5E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$W_5(A)$ は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とする 1 次元の部分空間である．
(2) B について．固有多項式は

$$F_B(x) = (x+a)(x-a)^2$$

で与えられる．
(i) $a = 0$ のとき．このときは，$A = O$ であり，A の固有値は 0 のみ．また，明らかに $W_0(A) = \mathbb{C}^3$ である．

(ii) $a \neq 0$ のとき．A の固有値は $\pm a$.
固有値 a に対する固有空間 $W_a(A)$ は，連立方程式 $(A - aE_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，

$$A - aE_3 = \begin{pmatrix} -a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$W_a(A)$ は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とする 2 次元の部分空間である．
一方，固有値 $-a$ に対する固有空間 $W_{-a}(A)$ は，連立方程式 $(A + aE_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，

$$A + aE_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 2a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$W_{-a}(A)$ は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とする 1 次元の部分空間である．□

例題 16.4 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．自然数 $n \geq 1$ に対して A^n を計算せよ．

解答　A の固有多項式は

$$F_A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

となるので，A は相異なる 2 つの固有値 $-1, 3$ を持つ．従って，A は対角化可能．固有値 -1 に属する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

固有値 3 に属する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．そこで，

$$P = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & (-1)^{n+1} + 3^n \\ (-1)^{n+1} + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．□

例題 16.5 次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解答　$F_A(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$ となるので，A の固有値は $\pm 1, 2$．このとき，$-1, 1, 2$ に属する固有ベクトルとして，それぞれ

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれる．これらは既に直交系を成しているので，それぞれ単位ベクトル化を行い，

$$\boldsymbol{p}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

に対して $P = (\boldsymbol{p}'_1, \boldsymbol{p}'_2, \boldsymbol{p}_3)$ とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．□

例題 16.6 3 次正規行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & -i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$i = \sqrt{-1}$ である．

(1) A の固有値と各固有値に属する固有空間を求めよ．

(2) $\mathbb{C}^3$ の *1* 次元部分空間で，A の不変部分空間となるものを全て求めよ．

解答 (1) A の固有多項式は $F_A(x) = (x-1)(x^2-2x-1)$ となるので，固有値は $1, 1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$ となる．
固有値 1 に対する固有空間 $W_1(A)$ は，連立方程式 $(A-E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$W_1(A)$ は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を基底とする 1 次元の部分空間である．同様に，

$$W_{1+\sqrt{2}} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad W_{1-\sqrt{2}} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

を得る．
(2) W を $\mathbb{C}^3$ の 1 次元部分空間で，A の不変部分空間なるものとする．まず，W は 1 次元空間であるから，ある $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3$ が存在して $W = \{\alpha\boldsymbol{x} \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ とかける．一方，W は A で不変であるから，$A\boldsymbol{x} \in W$ となる．従って，ある $\beta \in \mathbb{C}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ となる．従って，$\boldsymbol{x}$ は A の固有ベクトルである．即ち，W は A の固有空間の部分空間となる．(1) の結果より，A の固有空間は全て 1 次元であるから，W は $W_1, W_{1+\sqrt{2}}$, $W_{1-\sqrt{2}}$ のいずれかである． □

例題 16.7 A, B を対角化可能な n 次正方行列とする．このとき，A と B が同時対角化可能であるための必要十分条件は，$AB = BA$ であることを示せ．

解答 A と B がある正則行列 P を用いて同時対角化できるとする．即ち，

$$P^{-1}AP = \lambda E_n, \quad P^{-1}BP = \mu E_n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

となったとする．このとき，

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP) = \lambda\mu E_n$$

であるから，$AB = BA$ を得る．

逆に，$AB = BA$ が成り立っているとしよう．A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ とおき，各 α_i に属する A の固有空間を W_{α_i} とする．また，各 $1 \leq i \leq k$ に対して，$m_i = \dim(W_{\alpha_i})$ とおく．A は対角化可能であるから，一次独立な m_i 個のベクトル

$$\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}$$

であって，α_i に属する固有ベクトルとなるものが取れる．このとき，

$$P = (\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}_1^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_k}^{(k)})$$

とおくと，P は正則で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{m_1} & O & \cdots & O \\ O & \alpha_2 E_{m_2} & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \\ O & O & & \alpha_k E_{m_k} \end{pmatrix}$$

となる．

さて，一般に，$\boldsymbol{x} \in W_{\alpha_i}$ とすると，

$$\alpha_i(B\boldsymbol{x}) = B(\alpha_i \boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x} = (AB)\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{x})$$

であるから，B は W_{α_i} を保つことが分かる．即ち，$B(W_{\alpha_i}) \subset W_{\alpha_i}$ となる．ゆえに，

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} B_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & B_k \end{pmatrix}$$

となる．ここで，各 B_i は m_i 次の正方行列である．

今，B は対角化可能ゆえ，$P^{-1}BP$ も対角化可能である．従って，各 B_i も対角化可能である．実際，ある B_i で対角化不可能であるものがあったとすると，$P^{-1}BP$ の Jordan 標準型は

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \beta \end{pmatrix}$$

なる形の Jordan 細胞を含んでしまい，$P^{-1}BP$ が対角化可能であることに反する．そこで，各 $1 \leq i \leq k$ に対して，B_i を対角化して，

$$Q_i^{-1} B_i Q_i = \begin{pmatrix} \beta_{i,1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \beta_{i,l_i} \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & Q_k \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$(PQ)^{-1}A(PQ) = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{m_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_k E_{m_k} \end{pmatrix},$$
$$(PQ)^{-1}B(PQ) = \begin{pmatrix} Q_1^{-1}B_1Q_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & Q_k^{-1}B_kQ_k \end{pmatrix}$$

となる．即ち，A と B は正則行列 PQ を用いて同時対角化可能である．□

例題 16.8 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) A の最小多項式を計算せよ．

(2) A は対角化可能であることを示せ．

解答 (1) A の固有多項式は

$$F_A(x) = |xE_3 - A| = (x-3)^2(x-5)$$

となる．A の最小多項式 $f_A(x)$ は A の相異なる固有値をすべて根に持つので，

$$f_A(x) = (x-3)(x-5) \quad \text{または} \quad (x-3)^2(x-5)$$

となる．そこで，$(A-3E_3)(A-5E_3)$ を計算すると，

$$(A-3E_3)(A-5E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} = O$$

となるので，

$$f_A(x) = (x-3)(x-5)$$

であることが分かる．

(2) (1) の結果より，A の最小多項式は重根を持たないので，A は対角化可能である．□

17　レポート問題その2

問題 17.1 複素 n 次正方行列に関する 2 次方程式

$$aX^2 + bX + cE_n = O, \quad a \neq 0$$

を解け.（ヒント：二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式，及び X の最小多項式で分類せよ．一般に，このような X は無数にあることに注意せよ.）

問題 17.2 A を n 次正値エルミート行列とする.
(1) 任意の自然数 $m \geq 1$ に対して，$X^m = A$ を満たす正値エルミート行列 X が存在することを示せ.
(2) (1) で求めた正値エルミート行列 X は A に対して一意的であることを示せ.

問題 17.3 (1) エルミート行列 A について，以下は同値であることを示せ.

(i) A は正値.

(ii) A の固有値は全て正数.

(iii) ある正則行列 B が存在して，$A = B^*B$ が成り立つ.

(2) A を実対称行列とするとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{{}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

の最大値，最小値はそれぞれ，A の固有値の最大値，最小値に等しいことを示せ.
(3) A, B を実対称行列で，B は正値であるとする．このとき，

$$g(\boldsymbol{x}) = \frac{{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}}{{}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

の最大値，最小値はそれぞれ，t の方程式 $|A - tB|$ の解の最大値，最小値に等しいことを示せ.
(4) 2 変数函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy + 3y^2}{x^2 + xy + y^2}, \quad x,\, y \in \mathbb{R}$$

の最大値，及び最小値を求めよ.

問題 17.4 A を実 n 次正方行列で，$A^3 = E_n$ を満たすものとする.
(1) $\mathrm{Tr}\, A$ は整数であることを示せ.
(2) $\mathrm{Tr}\, A$ の取り得る値の範囲を求めよ.
(3) $\mathrm{Tr}\, A$ が最大または最小となるとき，A の固有多項式を求めよ.

問題 17.5 A を複素係数 n 次正方行列で，$A^4 = A^2$ をみたすものとする．
(1) A の固有値は $0, \pm 1$ のいずれかであることを示せ．
(2) A の固有多項式を $F_A(x) = x^k(x-1)^l(x+1)^m$ とするとき，

$$\operatorname{rank} A, \quad \operatorname{rank}(A+E), \quad \operatorname{rank}(A-E)$$

をそれぞれ，k, l, m を用いて表せ．（ヒント：A の *Jordan* 標準型を考えよ．A の最小多項式によって場合分けが必要．）

問題 17.6 A, B を n 次正方行列で，$AB = BA$ を満たすものとする．このとき，あるユニタリー行列 P が存在して，$P^{-1}AP, P^{-1}BP$ がともに上三角行列となることを示せ．

問題 17.7 A, B をともに行列式が 1 であるような，複素係数 2 次正方行列とする．
(1) A と B が同時三角化不可能であるとき，ある $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と，ある 2 次正則行列 P が存在して，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ a & \beta^{-1} \end{pmatrix}$$

となることを示せ．
(2) $\operatorname{Tr} A = 2$ かつ，$\operatorname{Tr} AB - \operatorname{Tr} B = 0$ ならば，A と B は同時三角化可能であることを示せ．（ヒント：$\operatorname{Tr} A = 2$ のとき，A の固有値は 1 のみであることに注意せよ．）

問題 17.8 A を n 次複素行列で，ある自然数 $m \geq 1$ に対して，$A^m = E_n$ を満たすものとする．このとき，以下の問いに答えよ．
(1) A は対角化可能であることを示せ．
(2) $|\operatorname{Tr} A| \leq n$ を示せ．
さて，各素数 $p > 1$ に対して，$A \in M_n(\mathbb{Z})$ であって，$|A| = 1$ かつ，$A - E_n$ の各成分が p で割り切れるようなもの全体の集合を

$$\Gamma_n(p) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid |A| = 1,\ A - E_n \text{ の各成分が } p \text{ で割り切れる}\} \subset M_n(\mathbb{Z})$$

とおく．
(3) $p > 2n$ とする．このとき，行列 $A \in \Gamma_n(p)$ が，ある自然数 $m \geq 1$ に対して $A^m = E_n$ を満たせば $A = E_n$ となることを示せ．

問題 17.9 A を固有値が 1 だけであるような複素係数 n 次正方行列とする．また，

$$V = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$$

とおく．
(1) V は $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間であることを示せ．
(2) V の次元を求めよ．（ヒント：A の最小多項式で場合分けが必要．）

18 計算問題解説

18.1 線型写像の行列表示

まず, 以下のような問題が与えられたとしよう：

問題.
V を体 K 上の n 次元ベクトル空間, W を体 K 上の m 次元ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線型写像とする．このとき V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ 及び W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m$ に対して, f を行列表示せよ.

解法. いくつかの段階に分けてこの問題を解こう.
Step 1. まず, 問題で求められていることを理解する．求められていることは, 線型写像 $f : V \to W$ を,

$$
\begin{aligned}
&V \text{ の基底} \qquad \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}, \\
&W \text{ の基底} \qquad \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m\}
\end{aligned}
$$

について行列表示することである．**時々, この段階ですでに間違っている解答が見受けられるので注意すること．指定されている基底がなんであるかがまず大事である**. すなわち求められているのは,

$$(f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_m)A$$

を満たす m 行 n 列の K を係数とする行列 A を求めることである．この意味を, もう少し掘り下げて考えてみよう.

ベクトル空間 V の基底が $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ であるから, 全ての $\boldsymbol{v} \in V$ は, $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ の K 上の一次結合でかける．すなわち

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \ (a_1, \dots, a_n \in K)$$

とかける．このとき, 線型写像 f による $\boldsymbol{v}$ の行き先は, f が線型であることから

$$f(\boldsymbol{v}) = a_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + a_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

となる．よって f は, V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ の行き先さえ定めてやれば, 行列で表現できることになる．これが線型写像の行列表示の原理である．この定義から明らかに, **V, W の基底の取り方を変えれば, 同じ f でも対応する行列表示は変わることに注意しよう**.

求められていること, 及び線型写像の行列表示の意味を理解したところで, 次の段階に移る.

Step 2. Step 1 で学んだことより, 行列表示のためには次に, $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ を, $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の一次結合で書かなければならない. これは, $f(\boldsymbol{v}_i)$ は W に属しており, なおかつ $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ が W の基底であるために可能になることに注意する. 基底の定義より, ある K の元 a_{ij} $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{v}_i) &= a_{1i}\boldsymbol{w}_1 + a_{2i}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mi}\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

と一意的に書ける. **この最後の表記, 一番最後の書き方は, ある意味で行列表示の本質を表しているので重要である.**

さて, ここまでできればほぼ問題は解けたようなものである. 最後の段階は単に, ここまでの結果をまとめて解答の形にする段階である.

Step 3. では最後に, 解答を作る. 上で求めた a_{ij} をそのまま行列として並べたものを, 以下のように A とおく：

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.
$$

ここで a_{ij} が A の (i, j) 成分であることに注意する. あるいは上の表記 (15) の一番右端の表記を, 上から順に並べたものと思ってもよい. このように並べれば, あとは左辺に $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots f(\boldsymbol{v}_n)$ を並べて, 右辺にまず $\boldsymbol{w}_1, \ldots. \boldsymbol{w}_m$ を並べ, それに続いて上で作成した行列

A を並べたものをイコールでつなげばよい. すなわち

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)A$$

とすれば, これが f の行列表示の形となる. 最後に A が f の行列表示である, といったような文面を付け加えるとなおよい.

注意. 線型写像ではなく, 線型変換, すなわち $f : V \to V$ という, V から自分自身への線型写像の場合は, 普通は基底は一組しか与えられないので, 出発点と行き先に対して同じ基底を用いて行列表示を行うこと.

それでは上でやったことを, 具体的な問題に当てはめてみよう.

問題

二次元ベクトル空間 $V = W = \mathbb{R}^2$ の間の線型写像 $f : V \to W$ を,

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a - 3b \\ -a + 5b \end{pmatrix}$$

で定義する. この f を, V の標準基底, 及び W の基底

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

に対して行列表示せよ.

解答.

Step 1. まず, 何を求められているかを確認する. 行列表示する際の基底は,

$$V \text{ の標準基底} : \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$W \text{ の基底} : \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である.

Step 2. Step 1 より, 求めるべきは

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)A$$

を満たすような 2 次正方行列 A である. そのためには,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e}_1) &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2, \\ f(\boldsymbol{e}_2) &= a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 \end{aligned}$$

を満たす $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ を求めればよい. **これらの a_{ij} の番号の付け方に注意すること**.

さて, まず $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ を計算より求めると,

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる. これらを $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ の一次結合で表したい. そのためには以下の方程式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 = a_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} &= a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 = a_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

をとけばよい. これは明らかに,

$$a_{11} = 1,\ a_{21} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 1$$

が解となる. よって並べ方に注意することで, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が得られる.

Step 3. ここまでくればあとはまとめるだけである. 最初に $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ を並べたものを左辺において, それから右辺に $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を並べて次に行列 A を書いたものが, 行列表示の式となる：

$$(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって f の, 与えられた基底に関する行列表示は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる. □

18.2 階数の計算方法

以下のような問題が与えられたとしよう：

問題.

(m, n) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の階数を, 基本変形を用いて計算せよ.

解法. いくつかの段階に分けてこの問題を解こう.

Step 1. まず 1 列目に着目する. 第 1 列の成分がすべて 0 である場合は，何も施さず，そのままにしておく.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

と, 名前をつけかえて, **このまま Step 3 へ進むこと**.

A の第 1 列の成分 $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ の中に 0 でないものがあるとき，その 1 つをとる. 例えば，$a_{i1} \neq 0$ とする. このとき，A の第 1 行と第 i 行を入れ換える. この操作を考えることによって，初めから $a_{11} \neq 0$ であるとしてよい. ここで一行目を $a_{11} \neq 0$ で割る. この結果, A は $(1,1)$ 成分が 1 である行列に変形される：

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Step 2. A' の各 i 行 $(2 \leq i \leq m)$ に対して,

$$第\, i\, 行 - 第\, 1\, 行 \times a_{i1}$$

という行基本変形を行うことにより,

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

の形に変形される.

Step 3. 次に，上の行列 $*$ の部分に同様の操作を施す. この操作を繰り返すことによって，最終的に階段行列に到達できる. あとは階段行列に関する定理より, 階数を数えることができる.

ではこの手法に従って, 問題を解いてみよう.

問題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよう.

Step 1. まず $(1,1)$ 成分が 0 なので, 行の入れ替えから始める. たとえば 2 行目と一行目を入れ替えて,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

としよう. $(1,1)$ 成分を 1 にするために, 1 行目を 2 で割って,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

を得る. これが Step 1 で得られるところの A' になる.

Step 2. 1 列目の $2,3$ 行目成分を 0 にする. 2 行目はすでにそうなっているので, 3 列目から 1 列目を引くことで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を得る. これが Step 2 で得られるところの A'' となる.

Step 3. 次は小行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

に対して, 同様の操作を実行する. $(1,1)$ 成分はすでに 1 であるからこのままでよい. $(2,1)$ 成分をゼロにするためには, 2 行目から 2 行目をひいて,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る. これらの操作を通して, A は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という階段行列へと変形される. よって階数は対角成分に現れる 1 の数, すなわち $\mathrm{rank}(A) = 2$ となる. □

18.3 逆行列の計算方法

次のような問題を考える.

問題.

n 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して, 基本変形を用いて A が正則かどうかを調べ，正則な場合はその逆行列を求めよ.

解法. これもいくつかの段階に分ける.

Step 1. A と n 次単位行列 E_n を並べてできる，$(n, 2n)$ 行列

$$(A, E_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を作る.

Step 2. (A, E_n) に**行基本変形のみを施して（ここは階数を求める操作と違う部分なので注意されたい）**，A の部分を

$$\begin{pmatrix} E_r & A' \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形にする．このとき，もし $r < n$ であれば，A は正則でない.

Step 3. Step 2 の操作で，$r = n$ となったとする．即ち，(A, E_n) が行基本変形だけで

$$(E_n, P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

となったとする．このとき，$P = A^{-1}$ であり，特に A は正則である.

　では，具体的な問題を解いてみよう.

問題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が正則かどうかを調べ，正則なら逆行列を求めよ.

解答. **Step 1**. まず，$(3, 6)$ 行列

$$(A, E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

Step 2. 次に行基本変形を行って，A の部分を簡単にしていく．まず，第 1 行と第 3 行を入れ換えて，第 1 行の -1 倍を第 2 行，第 3 行にそれぞれ加えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．そこで，第 2 行と第 3 行を入れ換えて，第 2 行の -2 倍を第 3 行に加えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．第 3 行を -2 で割って，第 3 行の -1 倍を第 1 行に加えると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

となる．従って，A は正則で，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

を得る．□

18.4 連立一次方程式の解法

体 K の元を係数とする連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{16}$$

を，基本変形を用いて体系的に解く方法について確認しよう．まず，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおくと，連立斉一次方程式 (16) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表されることに注意する．

一般に，連立一次方程式 (16) はいきなりは解けない．そこで，$b_1 = \cdots = b_m = 0$ であるような，**特別な場合**をまず考えてみる．このような連立一次方程式を**連立斉一次方程式**という．

Part 1. **連立斉一次方程式**

Step 1. A **に行基本変形のみを施して（ここも階数を求める操作とは異なるので注意されたい）**，階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix} \end{array}$$

に変形する．**任意の行列** A **は必ずこのような形に変形できることに注意する**．このとき，さらに行基本変形を行い，j_r 列，j_{r-1} 列，...，j_1 列をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r-1}, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを A' とおく．ここで，各 $\boldsymbol{e}_i$ たちは K^m の基本ベクトルを表す．即ち，

$$A' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \vdots & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix} \end{array}$$

である．

Step 2. $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ となる場合．
このとき A' は

$$\begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

なる形をしている．そこで，$(n, n-r)$ 行列

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

を考えるとき，この行列の $n-r$ 個の列ベクトルたちが連立斉一次方程式 (5) の解空間の基底になる．即ち，(5) の求める基本解である．

Step 3. 一般の場合．
j_1，...，j_r の残りの列番号を小さい方から順に k_1，...，k_{n-r} とし，n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{e}_{j_1}, \ldots \boldsymbol{e}_{j_r}, \boldsymbol{e}_{k_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_{n-r}})$ を考える．このとき，

$$A'P = \begin{pmatrix} E_r & A'' \\ O & O \end{pmatrix}$$

となるので，この $A'P$ に Step 2 の方法を適用して $(A'P)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求め，それらを $\boldsymbol{x}'_1, \ldots, \boldsymbol{x}'_{n-r}$ をとおく．すると，

$$P\boldsymbol{x}'_1, \ldots, P\boldsymbol{x}'_{n-r}$$

が求める $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解となる．

以上により，連立斉一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ を求めることができた．従って，その一般解は

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in K$$

で与えられる．

Part 2. **（一般の）連立一次方程式**
連立斉一次方程式の解法を利用して，一般の連立一次方程式を解くことを考えよう．まず，連立一次方程式の解を 1 つ見つけることから始める．

Step 1. $(n, n+1)$ 行列 $(A, \boldsymbol{b})$（これを連立一次方程式 (5) の**拡大係数行列**という.）を考え，これに**行基本変形のみを施して（ここも階数を求める操作とは異なるので注意されたい）**，階段行列 $(1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n+1)$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\
\vdots & & & & & & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\
O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O
\end{pmatrix}
\end{array}$$

に変形する．**任意の行列 $(A, \boldsymbol{b})$ は必ずこのような形に変形できることに注意する**．もし $j_r = n+1$ のときは対応する r 番目の方程式は

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$$

となり**解が存在しない**．即ちこれは，与えられた連立一次方程式は解けないことを意味する．

Step 2. $j_r \leq n$ のときは，さらに行基本変形を行い，続けて，j_r 列，j_{r-1} 列，$\ldots$，j_1 列

をそれぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_{r-1}, \ldots, \boldsymbol{e}_1$ に変形したものを

$$
(A', \boldsymbol{b}') = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & j_1 & & j_2 & & \cdots & j_r & & n+1 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ r \\ \\ \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & b'_1 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \vdots & * & b'_2 \\
\vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & b'_r \\
O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O & \mathbf{0}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

とおく．このとき，

$$
\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

を

$$
x_j = \begin{cases} b'_k, & \text{ある } k \text{ が存在して } j = j_k,\ (1 \leq k \leq r), \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}
$$

によって定めると，$\boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となる．(記号が多少複雑で分かりにくいかもしれないが，具体的な問題をこなす中で理解を深めてほしい．**特に**，$j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_r = r$ **である場合には，$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}'$ であることにも注意されたい**.）この $\boldsymbol{x}_0$ のように，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解を**特殊解**という．

Step 3.

次に，Part 1 の方法を用いて $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を求め，それらを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-r}$ とする．このとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}, \quad c_1, \ldots, c_{n-r} \in K
$$

で与えられる．

では，具体的な問題を解いてみよう．

問題. 連立一次方程式

$$
\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 & = 4 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}
$$

を解け．

解答. 与えられた連立一次方程式の拡大係数行列

$$
(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

を考える．これに行基本変形を施して簡単にしていこう．まず，2 行目に 1 行目の -1 倍を加え，3 行目に 1 行目の -2 倍を加える．次に，3 行目から 2 行目を引くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

となる．2 行目を -2 で割って，3 行目を -4 で割ると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．従って，この場合は連立方程式に解は存在しないことが分かる．□

問題. 連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 6x_3 & = -1 \end{cases}$$

を解け．

解答. 与えられた連立一次方程式の拡大係数行列

$$(A, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

を考える．これに行基本変形を施して簡単にしていこう．2 行目に 1 行目の -4 倍を足して，1 行目に 2 行目の -2 倍を足すと，

$$(A', \boldsymbol{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

となる．従って，この場合は連立方程式に解が存在することが分かる．上記の記号を踏襲すれば，$r = 2, j_1 = 1, j_2 = 2$ となっている．ゆえに，

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}' = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解になる．

次に，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を求めよう．上と全く同様の議論により，A に行基本変形を施すと，

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

となることが分かる．上記の記号を踏襲すれば，

$$A'' = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$$

である．従って，

$$\begin{pmatrix} -A'' \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解となる．

以上により，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + c \begin{pmatrix} -15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in K$$

で与えられる．□

18.5 正規直交基底の求め方

次のような問題を考える．

問題.

計量ベクトル空間 V の，任意の一次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対して，V の部分空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ の正規直交基底を求めよ．

解法. まず，与えられたベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ から，直交系 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ であって，

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

となるものを構成することを考える．(Schmidt の直交化法による.)

まず，

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$$

とおく．次に，

$$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1} \boldsymbol{b}_1$$

とおく．同様にして順に $\boldsymbol{b}_3, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ を

$$\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1} \boldsymbol{b}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2} \boldsymbol{b}_2 \cdots - \frac{\boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{b}_{j-1}}{\boldsymbol{b}_{j-1} \cdot \boldsymbol{b}_{j-1}} \boldsymbol{b}_{j-1}$$

によって定める．すると，作り方から $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が張る部分空間と $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ が張る部分ベクトル空間は一致する．即ち

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k \rangle$$

が成り立つことが分かる．また，簡単な計算により，$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ は直交系を成していることもわかる．

$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ から正規直交系を得るには，各 $\boldsymbol{i}$ の長さを 1 にすればよい．即ち，単位ベクトル化を行えばよい．つまり，

$$\frac{1}{\|\,\boldsymbol{b}_1\,\|}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \frac{1}{\|\,\boldsymbol{b}_k\,\|}\boldsymbol{b}_k$$

が求める正規直交基底である．

注意 しばしば，**直交系を求め終わって単位ベクトル化を忘れてしまっている答案**を見受けるので，忘れないようにしてほしい．

では，具体的な問題を解いてみよう．

問題. $\mathbb{R}^3$ の一次独立な三つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を Schmidt の直交化法を用いて, これらを正規直交化せよ.

解答　Schmidt の直交化法により，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{b}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{b}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}\boldsymbol{b}_1 - \frac{\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{b}_2}{\boldsymbol{b}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2}\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なるベクトルを得る．そこで，これらに単位ベクトル化を行うことにより，

$$\boldsymbol{b}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が求める正規直交基底である．□

注意 Schmidt の直交化法は，分数や根号の計算が続くので，もっとも計算間違いしやすい問題のうちの 1 つである．些細なミスで減点にならぬよう，最低 1 回は検算を忘れないようにしてほしい．

18.6 直交補空間の正規直交基底の求め方

問題.
V を計量ベクトル空間，W をその部分空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を W の基底とする．このとき，W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ．

解法.
V を計量ベクトル空間，W をその部分空間とし，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を W の基底とする．このとき，W の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めてみよう．

まず，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に，V のベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を追加して V の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を作る．($\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に追加するベクトルは，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底になれば何でもよい．とにかく頑張って 1 組見つけて来よう．)

次に，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を Schmidt の直交化法により直交化し，単位ベクトル化を行えば，V の正規直交基底

$$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$$

が得られる．このとき，

$$W = \{c_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{b}_r \,|\, c_1, \ldots, c_r \in K\}$$
$$W^\perp = \{c_{r+1}\boldsymbol{b}_{r+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n \,|\, c_{r+1}, \ldots, c_n \in K\}$$

である．従って，$\boldsymbol{b}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ が求める $W^\perp$ の正規直交基底である．

注意 18.1 一般に，W の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に，ベクトル $\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を付け足して V の基底を作るとき，$\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in W^\perp$ とは限らないことに注意する．即ち，$\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ たちは $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ に直交するとは限らない．

では，具体的な問題を解いてみよう．

問題. $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x = y \right\}$$

の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ．

解答 勘のいい人であれば，すぐに答えが分かるかもしれないが，ここでは上の方法を適用してみよう．まず，W は 1 次元の部分空間で，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

はその基底である．そこで，

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．これらは正規直交基底ではないので，Schmidt の直交化法を用いて正規直交基底を求めよう．すると，まず直交化を行い，

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

を得る．これらを単位ベクトル化して $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底

$$\boldsymbol{b}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る．このとき，

$$\boldsymbol{b}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が $W^\perp$ の正規直交基底である．□

18.7 直交射影の求め方

問題.

V を計量ベクトル空間，W を V の部分空間とし，$W^\perp$ を W の直交補空間とする．$p_W : V \to V$, $p_{W^\perp} : V \to V$ をそれぞれ，V の $W, W^\perp$ への直交射影とするとき，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$p_W(\boldsymbol{x})$, $p_{W^\perp}(\boldsymbol{x})$ を計算せよ．

解法.

まず，W 及び，$W^\perp$ の正規直交基底を求めておく．(これは，前小節を参照.）ここでは，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を W の正規直交基底とし，$\boldsymbol{a}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする．このとき，

$$p_W(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_r)\boldsymbol{a}_r$$
$$p_{W^\perp}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_{r+1})\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{a}_n$$

が成り立つ．

　では，具体的な問題を解いてみよう．

問題. $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x = y \right\}$$

を考える．このとき，$\mathbb{R}^2$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に対して，それらの W 及び，$W^\perp$ への直交射影 $p_W(\boldsymbol{e}_i)$, $p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_i)$ を計算せよ．

解答　まず，W 及び，$W^\perp$ の正規直交基底を求めるところから始める．ここでは，前節の結果を利用しよう．W の正規直交基底として，$\boldsymbol{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が，$W^\perp$ の正規直交基底

として，$\boldsymbol{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ がとれる．よって，各 $\boldsymbol{e}_i$ と c_j の内積を計算すると，

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{c}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{c}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるので，

$$p_W(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_1, \quad p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2$$
$$p_W(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2, \quad p_{W^\perp}(\boldsymbol{e}_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{c}_2$$

を得る．□

注意 18.2 稀に，与えられたベクトルと，計算した正規直交基底との内積だけ計算して解答が終わっている答案があるが，ベクトルの直交射影を求めよと問われたら，射影先のベクトルを答えることに注意してほしい．

18.8 行列の固有値，固有空間，対角化，冪乗計算

この節では，与えられた行列の固有空間を求め，その結果を対角化や冪乗計算に応用することを考える．ここでは，行列式の計算，連立斉一次方程式の基本解など，これまでに学習したことを総動員するのでしっかりと復習しておくことが望まれる．

I. 固有値，及び固有空間の計算

次のような問題を考えよう．

問題.
複素係数 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，A の固有空間を求めよ．

解法.
行列の固有空間を求めるには，まずその行列の固有値を求めるところから始める．そのために，固有多項式を計算しなければならない．A の固有多項式は

$$F_A(x) = \det(xE_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

で与えられる．固有値は固有多項式の根全体なので，$\det(xE_n - A) = 0$ とおいて，これを x について解けばよい．

注意 18.3 稀に，$\det(A - xE_n)$ を固有多項式としている答案があるが，通常，**固有多項式の最高次の係数は** 1 **とするのが慣例**であるので注意してほしい．また，**固有多項式は多項式でるので，あたかも方程式のように** $\det(xE_n - A) = 0$ **と書かれても，（気持ちは分かるが）不正解**である．細かいところではあるが注意してほしい．

一方，複素係数の行列を考えているので，固有多項式は複素係数の 1 変数多項式である．従って，**その根（固有値）は重複度も込めて丁度** n **個存在する**ことにも注意されたい．

さて，固有値が求められたので，次は固有空間を求めよう．α を A の固有値とするとき，

$$\boldsymbol{a} \text{ が } \alpha \text{ に属する固有ベクトル} \Longleftrightarrow (A - \alpha E_n)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

である．即ち，A の α に属する固有空間 W_α は，連立一次方程式 $(A - \alpha E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 $W(A - \alpha E_n)$ に外ならない．従って，α に属する固有空間の基底を求めるには，$(A - \alpha E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**基本解を求めればよい**ことが分かる．

以上の議論を参考に，具体的な問題を解いてみよう．

問題．行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

の固有値，固有空間を求めよ．

解答　まず，A の固有多項式を計算しよう．すると，

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & -2 & +1 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 2 & x-3 \end{vmatrix}$$

を計算すればよい．

このように，多項式を成分とするような行列の行列式を計算する場合，迂闊に余因子展開を始めると計算がかなり繁雑になったりするので，まず**基本変形を用いて簡約できないかを考えるのが常套**である．すると，各列を全て足し合わせた列ベクトルを考えると，そのすべての成分が x になることが分かる．こうなれば，x で括りだせることができるので行列式をより簡約化できることが分かる．

より具体的には以下のようにして行う．第 1 列に第 2 列と第 3 列を加える．次に第 1 列から x を括りだす．すると次のようになる．

$$F_A(x) = x \begin{vmatrix} 1 & -2 & +1 \\ 1 & x & -1 \\ 1 & 2 & x-3 \end{vmatrix}$$

そこで，$(1,1)$ 成分に 1 が出たので，第 1 列の第 2 行目以降が 0 になるように行基本変形を施して，

$$F_A(x) = x\begin{vmatrix} 1 & -2 & +1 \\ 0 & x+2 & -2 \\ 0 & 4 & x-4 \end{vmatrix}$$

となる．従って，後は，第 1 列に余因子展開を施して，

$$F_A(x) = x^2(x-2)$$

となることが分かる．よって，A の固有値は $0,\ 2$ である．

続いて，固有値 2 に属する固有空間 W_2 を求めよう．これは，連立一次方程式 $(A-2E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間である．ゆえに，

$$B = A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいて，B に**行基本変形**を施すと，

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，W_2 の基底は $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．

同様に，固有値 0 に属する固有空間 W_0 の基底は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる．□

II. 行列の対角化とその応用

次に，行列の固有空間の計算を利用して，行列の対角化を求めることを考えてみよう．**一般に，全ての行列が対角化できるわけではない**ことに注意する．

問題.

複素係数 n 次正方行列 A が与えられたとき，A が対角化可能かどうかを判定し，対角化可能であれば対角化せよ．

解法.

与えられた行列 A が対角化可能かどうかを判定するには以下の手順に従えばよい．

手順 1 A の固有多項式 $F_A(x)$ は重根をもつか?

Yes $\Longrightarrow$ 手順 2 へ．　　No $\Longrightarrow$ 対角化可能.

手順 2 A の相異なる固有値全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，$A$ の固有多項式を

$$F_A(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

とするとき，各 α_i に対して $(A-\alpha_i E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の**基本解が** k_i **個の元から構成されているか**? 即ち，$k_i = \dim W_{\alpha_i}$ となっているか?

Yes $\Longrightarrow$ 対角化可能.　　No $\Longrightarrow$ 対角化不可能.

この手順により対角化不可能となった場合，対角化は諦めて下さい.（理論的に対角化できないことが分かっています.）

次に，A を対角化可能な n 次正方行列とするとき，A を対角行列に変形させるために必要な正則行列 P を構成してみよう．そのためには，A の一次独立な n 個の**固有ベクトルを並べてできる行列**を P とすればよい．具体的には以下のようになる.

まず，A の固有多項式を $F_A(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$ とする．各 α_i に対して

$$\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \boldsymbol{p}_2^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k_i}^{(i)}$$

を $(A-\alpha_i E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解の 1 組とする．このとき，(n, k_i) 行列 P_i を

$$P_i = (\boldsymbol{p}_1^{(i)}, \boldsymbol{p}_2^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{k_i}^{(i)})$$

で定め，n 次正方行列 P を

$$P = (P_1, P_2, \cdots, P_s)$$

で定める.（A は対角化可能なので，一次独立な A の固有ベクトルが n 個とれることに注意する.）すると，P は正則行列であり，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} D_1 & & & O \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & D_s \end{pmatrix}$$

となる．ここで，各 D_i は対角成分が全て α_i であるような k_i 次対角行列である.

注意 18.4 上で考えた対角化は，あくまで P の構成によることに注意する．即ち，P_i たちの順序を変えて同様の議論を行った場合，対角化は出来るがその際に対角成分に現れる A の固有値の順序が変わることに注意する.

行列の対角化は，行列の冪を計算することに応用できる．次のような問題を考えよう．

問題.

対角化可能な複素係数 n 次正方行列 A に対して，A^k, $k \geq 1$ を計算せよ．

解答.

P を n 次正則行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となるものとする．このとき，$k \geq 1$ なる任意の整数 k に対して，

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

であり，対角行列の冪乗は各対角成分を冪乗すればよいことに注意して，

$$A^k = P\,(P^{-1}AP)^k\,P^{-1} = P \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & & O \\ & \alpha_2^k & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

を得る．従って，上式右辺を具体的に計算することで A^k が計算できる．

行列の対角化についての具体例は例題 16.4, 16.5 などを参照してください．

18.9 行列の上三角化の計算

ここで，与えられた行列を上三角化する具体的な方法について考えよう．**任意の行列は上三角化できることに注意する**.

問題.

複素係数 n 次正方行列 A に対して，ある正則行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるようにせよ．

解法.

いくつかの Step に分けて考える．

Step 1. A の固有値全体を（重複度も込めて）$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とする．まず，固有値 α_1 に属する A の固有ベクトルを 1 つとりそれを $\boldsymbol{q}_1$ とする．すると，$\boldsymbol{q}_1$ に適当なベクトル $\boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ を付け加えて $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になるように出来る．(このようなベクトルの組 $\boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は，$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底になりさえすれば何でもよい．頑張って見つけて来よう.)

このとき，$Q_1 = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n)$ とおくと Q_1 は正則で，ある $n-1$ 次正方行列 A_1 に対して

$$Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ O & A_1 \end{pmatrix}$$

となる．

Step 2．さて次に，A_1 の固有値は（重複度も込めて）$\alpha_2, \dots, \alpha_n$ である．そこで，α_2 に属する A_1 の固有ベクトルを 1 つとりそれを $\boldsymbol{q}'_1$ とする．すると，$\boldsymbol{q}'_1$ に適当なベクトル $\boldsymbol{q}'_2, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ を付け加えて $\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ が $\mathbb{C}^{n-1}$ の基底になるようにする．このとき，$Q_2 = (\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1})$ とおくと Q_2 は $n-1$ 次正則行列で，ある $n-2$ 次正方行列 A_2 に対して

$$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

となる．以下，この操作を繰り返して，各 $1 \leq i \leq n-1$ に対して $n-i+1$ 次正則行列 Q_i を構成する．

Step 3. 最後に，

$$P = Q_1 \begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & O \\ O & Q_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E_{n-2} & O \\ O & Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

とおくと，

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ O & \alpha_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ O & \cdots & O & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となることが分かる．

注意 18.5 P としてユニタリー行列をとりたい場合は，各 Q_i を構成するベクトルたちにシュミットの直交化法を適用して正規直交化しておけばよい．即ち，上の議論においては，$\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n$ を正規直交化したものを Q_1 とおく．次に，$\boldsymbol{q}'_1, \dots, \boldsymbol{q}'_{n-1}$ を正規直交化したものを Q_2 とし，以下同様の議論を行って Q_i, $(1 \leq i \leq n-1)$ を作る．すると，各 Q_i はユニタリー行列であり，従って P もユニタリー行列となる．

この議論を具体的な問題に適用させてみよう．

問題. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

を上三角化せよ．

解答　まず，A の固有値を求めよう．A の固有多項式を計算すると，$F_A(x) = x^2$ となる

ので，A の固有値は 0 のみである．そこで，固有値 0 に属する A 固有空間 W_0 を求めてみよう．即ち，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間 $W(A)$ の基本解を求めると，

$$\boldsymbol{q}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

となる．よって，特に $\dim W_0=1\neq 2$ であることが分かる．つまり，A は対角化不可能である．

Step 1 に従って，あるベクトル $\boldsymbol{q}_2$ で，$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が $\mathbb{C}^2$ の基底となるものを見つける．ここでは,

$$\boldsymbol{q}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

としてみよう．実際，$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ が一次独立であることは簡単に示される．このとき，$Q_1=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2)$ とおくと Q_1 は正則で,

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

となる．□

線型代数学演習 A, B 要約の訂正

- 17 ページ, 一番下の行: 添え字に間違いがありました. 正しい式は,

  $$\alpha_1 = -(a'_{12}\alpha_2 + \cdots + a'_{1m}\alpha_m)$$

  です.

- 26 ページ, 下から 4 行目, "… $K[x]$ とき"→ "… $K[x]$ と おき"

- 57 ページ, **問題 6.2**, 間違いというわけではないのですが, W_1, W_2 の定義は以下のようになおしてください.

  $$W_1 = \{\{a_n\} \in S \mid a_{n+1} = 2a_n\},$$
  $$W_2 = \{\{a_n\} \in S \mid a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0\}.$$

- 62 ページ, 下から 2 行目. 正しくは, $P(A, E_n) = (PA, PE_n) = (E_n, P)$ です.