2012年度

線型代数学演習B

No. 15 問題 (No. 9からNo. 14までの復習)

1 A を次で与えられる3次実対称行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) A の固有多項式, 固有値を求め, 各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ の基底を与えよ.

(2) $U^{-1}AU = {}^t\!UAU = D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ となる対角行列 D と実直交行列 U を与えよ.

2 $V = \{a_2x^2 + a_1x + a_0\,;\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}\}$ を高々2次の複素係数一変数多項式全体のなすベクトル空間とする. いま, 線型写像 $\varphi : V \longrightarrow V$ を以下で与える.

$$(\varphi f)(x) = (x-1)(f(x+1) - f(x)), \quad f \in V.$$

(1) $f_0, f_1, f_2 \in V$ を $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$ なる元とする. このとき, V の基底 $\{f_0, f_1, f_2\}$ に関する φ の表現行列を求めよ.

(2) 線型写像 φ の固有多項式と固有値を求めよ.

(3) φ の各固有値 α について, α に属する固有空間 $W_\alpha = \{f \in V\,;\, \varphi f = \alpha f\}$ の基底を与えよ. ただし, 基底に現れるベクトルは多項式の形で具体的に表せ.

3 $\mathbb{R}^2$ を標準内積により計量ベクトル空間と考える. そして, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ について, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の標準内積とし, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムとする.

(1) $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ とし, これらを並べて得られる2次実正方行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とする. このとき, ${}^t\!AA$ が対角行列であることと, $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が直交することとが同値であることを示せ.

(2) A を2次実正則行列とするとき, ${}^t\!AA$ の(重複を込めた)2つの固有値はいずれも正実数であることを示せ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 2次実直交行列 U で, $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = AU$ としたとき, $\|\boldsymbol{b}_1\| \geq \|\boldsymbol{b}_2\|$, かつ $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ が直交するものが存在する. ${}^tBB$ を考えることにより, この U および B を与えよ.