2012年度

線型代数学演習B

No. 14 問題 (発展その2)

○ 定義: n を正整数, A を n 次複素正方行列とする. このとき, $f(A) = O$ となる複素係数一変数 モニック 多項式 (最高次の係数が 1 である多項式)f で, 次数が最小なものがただ 1 つ存在する. この多項式 f を A の 最小多項式 と呼ぶ. A の最小多項式は, $g(A) = O$ となる任意の複素係数一変数多項式 g を割り切る. 特に, Cayley-Hamilton の定理より, A の固有多項式は最小多項式で割り切れる. さらに, A の任意の固有値は最小多項式の根である.

1 A を次で与えられる 3 次複素正方行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) A の各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ を求めよ.
(2) A の各固有値 α について, $V' = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\,;\, (\alpha E_3 - A)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $V'' = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\,;\, (\alpha E_3 - A)^3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めよ.
(3) A の最小多項式を求めよ.

2 c を複素数とし, A を次で与えられる行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & c+1 & 0 \\ 1 & c-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) A の各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3\,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ の次元を求めよ. そして, A が対角化可能であるための c の必要十分条件を求めよ.
(2) A が対角化可能でない c について, $\displaystyle\prod_{\alpha\,;\,A\text{ の固有値}} (\alpha E_3 - A)$ を計算せよ.
(3) A が対角化可能でない c について, A の最小多項式を求めよ.

3 n を正整数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を相異なる複素数とする. いま, n 次複素正方行列 A の最小多項式 f_A が次の形をしているとする.

$$f_A(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3).$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ により, (重複を込めずに)A のすべての固有値が尽くされる. このとき, 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して, 各固有値 $\alpha_j\,(j = 1,2,3)$ に属する固有空間 $W_{\alpha_j} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha_j\boldsymbol{x}\}$ の元 $\boldsymbol{v}_j \in W_{\alpha_j}$ が存在して, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ と表されることを以下の手順により示せ.
(1) $f_1(t) = (t-\alpha_2)(t-\alpha_3)$, $f_2(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_3)$, $f_3(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)$ とするとき, (f_1, f_2, f_3 が互いに素であること, および f_A が f_1, f_2, f_3 の最小公倍式であることから) 次の等式 $(*)$ が成り立つ複素数 c_1, c_2, c_3 が存在する.

$$1 = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + c_3 f_3(t). \qquad (*)$$

この c_1, c_2, c_3 を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて表せ.
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ について, $f_j(A)\boldsymbol{v} \in W_{\alpha_j}\,(j = 1,2,3)$ を示せ.
(3) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ なる $\boldsymbol{v}_j \in W_{\alpha_j}\,(j = 1,2,3)$ を $A, \boldsymbol{v}$ を用いて表せ.