2012 年度

線型代数学演習 B

No. 13 問題 (発展その 1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の実係数二次形式 f を考える.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 14x_1x_2 + 20x_1x_3 - 14x_2x_3.$$

(1) 3 次実対称行列 A を用いて $f(x_1, x_2, x_3) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3))$ と表せ.
(2) A の固有値と, その重複度を求めよ.
(3) 二次形式 f の符号数を答えよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ α を実数とし, f を次で与えられる実係数二次形式とする.

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + 4x_1x_2 + 4\alpha x_2^2.$$

(1) 2 次実対称行列 A を用いて $f(x_1, x_2) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}\ \ (\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2))$ と表せ. そして, β_1, β_2 を A の固有値 (これらはいずれも実数である), 2 次実直交行列 U を ${}^tUAU = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}$ となるものとし, $U^{-1}\boldsymbol{x} = {}^t(y_1, y_2)$ とするとき, y_1, y_2 を変数とする二次形式 $g(y_1, y_2) = f(x_1, x_2)$ を β_1, β_2 を用いて表せ. なお, β_1, β_2 の値および U の具体的な形は求めなくてもよい. ヒント: U は直交行列であるから, $U^{-1} = {}^tU$ である.
(2) 二次形式 $f(x_1, x_2)$ が正値 $(x_1, x_2 \in \mathbb{R}, {}^t(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ならば $f(x_1, x_2) > 0)$ となるための α の必要十分条件を求めよ.
(3) 小問 (2) の条件を満たす α について, $D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x_1, x_2) \leq 1 \right\}$ の面積を α を用いて表せ. ここで, 長軸の長さ $2a$, 短軸の長さ $2b\ \ (a \geq b > 0)$ なる楕円 ($a = b$ のときは円) およびその内部全体の面積が πab であること, および直交変換 $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \mapsto U^{-1}\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ により $\mathbb{R}^2$ 内の図形の面積は変わらないことを証明なしで用いてよい.

$\boxed{\mathbf{3}}$ A_4 を次で与えられる 4 次実対称行列とする.

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

(1) A_4 に対して, 右から基本行列を掛けて列基本変形を施し, さらに左から同じ基本行列の転置行列を掛けて行基本変形を施す操作を繰り返すことにより, $A_4 = {}^tP_4 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_3 \end{pmatrix} P_4$ となる 4 次実正則行列 P_4 および 3 次実対称行列 A_3 を与えよ.
(2) $A_4 = {}^tBB$ となる 4 次実正則行列 B を与えよ.
(3) A_4 が正値行列である, 即ち, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ について ${}^t\boldsymbol{x}A_4\boldsymbol{x} > 0$ が成り立つことを示せ.