2012年度
線型代数学演習B
No. 12 問題 (固有値と固有ベクトルその4)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Aを次の3次実対称行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 5 & -22 \\ 5 & -5 & 10 \\ -22 & 10 & -14 \end{pmatrix}.$$

(1) Aの固有多項式, 固有値を求め, 各固有値αに属する固有空間$W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$の基底を与えよ.

(2) $U^{-1}AU = {}^tUAU = D$となる対角行列$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$と, 実直交行列$U$を与えよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Aを次の5次実対称行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Aの固有値と, 各固有値αに属する固有空間$W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^5 \,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$を求めよ. ヒント: Aが正則であるかどうか考えよ. また, 0でない固有値については, Aの各行を比較することにより, 固有ベクトルを見つけることができる.

(2) $U^{-1}AU = {}^tUAU = D$となる対角行列$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{pmatrix}$と, 実直交行列$U$を与えよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $V = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \,;\, {}^tX = X\}$とし, 2次複素正方行列$A$について, V上の線型写像$\varphi_A : V \longrightarrow V$を次で与える.

$$\varphi_A(X) = AX + X\,{}^tA \quad (X \in V).$$

(1) Pを2次複素正則行列, Aを2次複素正方行列とし, $B = PAP^{-1}$とおく. このとき, 任意の複素数αおよび$X \in V$について, $\varphi_A(X) = \alpha X$が成り立つことと, $\varphi_B(PX\,{}^tP) = \alpha PX\,{}^tP$が成り立つこととが同値であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$とする. このとき, $U^{-1}AU = {}^tUAU = D$となる対角行列$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$と実直交行列$U$を与えよ.

(3) 小問(2)におけるAについて, φ_Aの固有値と, 各固有値に属する固有空間を求めよ. ヒント: まずφ_Dの固有値と固有ベクトルを考えよ.