2012年度

線型代数学演習B

No. 11 問題 (固有値と固有ベクトルその3)

1 A を次の3次Hermite行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1-i \\ 0 & 3 & 0 \\ -1+i & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(1) A の固有多項式, 固有値を求め, 各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \,;\, A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ の基底を与えよ.

(2) $U^{-1}AU = U^*AU = D$ となる対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ とユニタリー行列 U を与えよ.

2 α を複素数とし, A を次で与えられる2次複素正方行列とする.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & i \\ i & 2-\overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

(1) A が正規行列となる, 即ち, $AA^* = A^*A$ が成り立つ複素数 α をすべて求めよ.

(2) 小問(1)で求めた α について, $U^{-1}AU = U^*AU = D$ となる対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ と, ユニタリー行列 U を与えよ.

3 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元計量ベクトル空間とし, $u, v \in V$ について, その内積を (u, v) で表すとする. いま, $f : V \longrightarrow V$ を線型写像で, $f^* \circ f : V \longrightarrow V$ が $0, 1$ のみを固有値として持つものとする. ただし, $f^* : V \longrightarrow V$ は f の随伴写像とする.

$$(f^*(u), v) = (u, f(v)) \quad (u, v \in V).$$

(1) f および $f^* \circ f$ の核 $\mathrm{Ker} f = \{v \in V \,;\, f(v) = 0\}$, $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \{v \in V \,;\, (f^* \circ f)(v) = 0\}$ について, $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$ が成り立つことを示せ.

(2) $f^* \circ f$ の1に属する固有空間 $W_1 = \{v \in V \,;\, (f^* \circ f)(v) = v\}$ は, $\mathrm{Ker} f$ の直交補空間 $(\mathrm{Ker} f)^\perp = \{w \in V \,;\, (w, v) = 0 \, (\forall v \in \mathrm{Ker} f)\}$ と一致することを示せ. ヒント: $(f^* \circ f)^*$ はどのような写像であるか考えよ.

(3) f の像 $\mathrm{Im} f = \{f(v) \in V \,;\, v \in V\}$ の任意の元 $w \in \mathrm{Im} f$ について, $(f \circ f^*)(w) = w$ が成り立つことを示せ. ヒント: 小問(2)により得られる直交分解 $V = \mathrm{Ker} f \oplus W_1$ を用いよ.

(4) $\mathrm{Im} f$ の直交補空間 $(\mathrm{Im} f)^\perp = \{w \in V \,;\, (w, f(v)) = 0 \, (\forall v \in V)\}$ の任意の元 $w \in (\mathrm{Im} f)^\perp$ について, $(f \circ f^*)(w) = 0$ が成り立つことを示せ.