2012年度

線型代数学演習B

No. 10 問題 (固有値と固有ベクトルその2)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2次正方複素行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) 行列 A の固有多項式, および固有値を求めよ.

(2) 各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^2 \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ の基底を求めよ.

(3) 行列 A を対角化するような (つまり, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$ となる) 正則2次正方複素行列 P が存在する. このような P を1つ求めよ.

(4) 任意の自然数 n に対し, A^n を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の行列 $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ に対し, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1+c & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-c \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{C}).$$

(1) 行列 A の固有多項式, および固有値を求めよ.

(2) 各固有値 α に属する固有空間 $W_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\}$ の次元を (必要なら定数 c の値によって場合分けして) 求めよ.

(3) 行列 A が対角化可能であるような定数 c をすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 任意の n 次正方複素行列 A に対し,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C})$$

となる正則行列 P が存在する (これを行列の <u>上三角化</u> と呼ぶ). 必要ならばこの事実を用いて, 以下の問いに答えよ.

(1) 上三角行列の対角成分 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は A の固有値であることを示せ.

(2) ある自然数 m に対し

$$A^m = O$$

となる正方行列 A を <u>べき零行列</u> という. べき零行列の固有値は0のみであることを示せ.

(3) 固有値が0のみである正方行列はべき零行列であることを示せ.