

2012年度

## 線型代数学演習B

### No. 9 問題 (固有値と固有ベクトルその1)

1 以下の行列  $A \in M_3(\mathbb{C})$  に対し, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) 行列  $A$  の固有多項式, および固有値を求めよ.

(2) 各固有値  $\alpha$  に属する固有空間  $W_\alpha = \{x \in \mathbb{C}^3 \mid Ax = \alpha x\}$  の基底を求めよ.

2  $V = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$  とする. 線型写像  $\varphi: V \rightarrow V$  を以下で定義する.

$$\varphi: f \mapsto (x-1) \frac{df}{dx}$$

(1)  $V$  の基底  $\{1, x, x^2\}$  に関する  $\varphi$  の表現行列を求めよ.

(2) 線型写像  $\varphi$  の固有多項式, および固有値を求めよ.

(3) 各固有値  $\alpha$  に属する  $\varphi$  の固有空間  $W_\alpha = \{f \in V \mid \varphi(f) = \alpha f\}$  の基底を求めよ.

3  $A \in M_n(\mathbb{C})$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $A^2 = A$  を満たすならば,  $A$  の固有値は 0 または 1 であることを示せ.

(2) 小問 (1) の逆は成り立たない.  $n = 2$  に対し, そのような例を挙げよ. つまり, 固有値は 0 または 1 だが,  $A^2 \neq A$  となる  $A \in M_2(\mathbb{C})$  の例を挙げよ.

(3)  $A \in M_2(\mathbb{C})$  が固有値として 0 と 1 の両方を持つならば,  $A^2 = A$  を満たすことを示せ.