2012年度

線型代数学演習B

No. 8 問題 (No. 2からNo. 7までの復習)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の性質を持つ行列を <u>簡約行列</u> と呼ぶ.

(i) 階段状の形をしている.

(ii) 各行の0でない最も左端の成分は1である.

(iii) 性質 (ii) における1の上下の成分は全て0である.

即ち, 簡約行列とは以下のような形をした行列のことである.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & 0 & * & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

いま, 次の $\mathbb{R}$ 上の非斉次連立一次方程式を考える：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 7x_5 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 + x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases} \qquad (*)$$

(1) 方程式 $(*)$ の拡大係数行列を行基本変形のみを用いて簡約行列に変形せよ.

(2) 方程式 $(*)$ の一般解を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間 W を以下のように定める.

$$W = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c, c' \in \mathbb{R} \right\} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

(1) a の値によって場合分けして, W の次元を求めよ.

(2) a の値によって場合分けして, 標準内積に関する直交補空間 $W^\perp$ の基底を1組求め, その基底に Schmidt の直交化法を施して正規直交基底にせよ.

問題は裏へ続く

$\boxed{\mathbf{3}}$ n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ において, 対角成分 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ の和を A の トレース と呼び, 以下の記号で表す.

$$\mathrm{tr}A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(1) $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ に対し, (X, Y) を以下のように定めると, これは $M_n(\mathbb{C})$ 上の内積になることを示せ. ただし, Y^* は Y の随伴行列を表す.

$$(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^*).$$

(2) $M_2(\mathbb{C})$ に (1) で定めた内積 $(\cdot,\cdot)$ を入れる. 部分空間 $V = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}X = 0\}$ に対し, V の直交補空間 $V^\perp$ は以下のようになることを示せ.

$$V^\perp = \{kE \,|\, k \in \mathbb{C}\} \quad (E : 2\text{ 次単位行列}).$$

(3) A, B を 2 次のユニタリー行列とする. このとき次の (a), (b) は同値であることを示せ.

(a) 全ての $X \in V$ に対し, $AXB \in V$ が成り立つ.

(b) $BA = cE \in V^\perp$ かつ $|c| = 1$ を満たす $c \in \mathbb{C}$ が存在する.