2012年度
線型代数学演習B
No. 7 問題 (計量ベクトル空間その4)

○ 定義: V, W を内積 $(\cdot,\cdot)_V, (\cdot,\cdot)_W$ を持つ有限次元計量ベクトル空間とし, $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき, 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対し, 次のことが任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について成り立つような $f^*(\boldsymbol{w}) \in V$ が一意的に存在する.

$$(\boldsymbol{v}, f^*(\boldsymbol{w}))_V = (f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w})_W$$

こうして得られる写像 $f^* : W \longrightarrow V$ は線型になる. この f^* を f の 随伴写像 と呼ぶ.

1 $V = \{ax+b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ とし, 内積を

$$(g(x), h(x))_V = \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$$

と定め, 線型写像 $f : V \to V$ を以下で定義する.

$$f \,:\, g(x) \longmapsto \frac{dg(x)}{dx}$$

(1) 内積の値 $(1, f^*(ax+b))_V$, $(x, f^*(ax+b))_V$ を a, b を用いて表せ.

(2) f の随伴写像 f^* を求めよ. つまり, $f^*(ax+b) = cx+d$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ とおいたとき, c, d を a, b を用いて表せ.

2 線型写像 $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ を $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+iy \\ y \end{pmatrix}$ と定義する. また, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して, 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を以下のように定める (これが内積であることは証明しなくてもよい).

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c_1 x_1 \overline{y_1} + c_2 x_2 \overline{y_2} \quad (c_1, c_2 > 0).$$

$\mathbb{C}^2$ に内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ をいれた計量ベクトル空間を V とおく. このとき, V の基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ に Schmidt の直交化法を施して得られる V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ を求めよ.
(2) V の正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.
(3) $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ に関する f の随伴写像 f^* の表現行列 B を求めよ.

3 V, W をそれぞれ内積 $(\cdot,\cdot)_V, (\cdot,\cdot)_W$ を持つ有限次元計量ベクトル空間とし, 線型写像 $f : V \to W$ とその随伴写像 $f^* : W \to V$ を考える. このとき,

$$\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Ker} f)^\perp$$

を以下の手順で示せ. ただし, $(\mathrm{Ker} f)^\perp$ は $\mathrm{Ker} f$ の直交補空間を表す.

(1) $\mathrm{Im} f^* \subset (\mathrm{Ker} f)^\perp$ を示せ.

(2) $(\mathrm{Im} f^*)^\perp \subset \mathrm{Ker} f$ を示せ.

(3) $\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Ker} f)^\perp$ を示せ.