2012年度
線型代数学演習B
No. 6 問題 (計量ベクトル空間その3)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 計量ベクトル空間 V, V' の間の線型写像 $f : V \to V'$ が <u>計量同型写像</u> であるとは, f が全単射で, 任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対し $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)_V = (f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2))_{V'}$ を満たすときをいう.

正の実数 $a > 0$ に対し, 計量ベクトル空間 V_a を $V_a = \mathbb{R}^2$, 内積 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{V_a} = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}/a^2$ で定義する. このとき, 以下の 4 つの線型写像 f, g, h, i は計量同型写像であることを示せ.

(1) 正の定数 $k > 0$ に対して, $f : V_a \to V_{ka},\ \ f(\boldsymbol{u}) = k\boldsymbol{u}$.

(2) $g : V_a \to V_{1/a},\ \ g\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a^2 \\ -1/a^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

(3) $h : V_a \to V_a,\ \ h\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

(4) $i : V_a \to V_a,\ \ i\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 計量ベクトル空間 V とその部分集合 W に対し,

$$W^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V \,|\, \text{すべての } \boldsymbol{w} \in W \text{ に対し, 内積 } (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})_V = 0\}$$

を W の <u>直交補空間</u> と呼ぶ.

(1) 次の 2 つのベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W とするとき, W の直交補空間 $W^\perp$ の基底を求めよ. ただし, 内積は標準内積とする.

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(2) 小問 (1) で求めた基底に Schmidt の直交化法を適用して, $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 計量ベクトル空間 V とその部分空間 W, 及び W の直交補空間 $W^\perp$ を考えると, 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は一意的に $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$ $(\boldsymbol{w}_1 \in W, \boldsymbol{w}_2 \in W^\perp)$ と書くことができる. 線型写像 $p_{W^\perp} : V \to V$ を $p_{W^\perp}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w_2}$ と定義するとき, $p_{W^\perp}$ を $W^\perp$ への <u>直交射影</u> と呼ぶ.

(1) $V = \{ax^2 + bx + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ とし, 内積を

$$(f(x), g(x))_V = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と定める (No. 5 問題 $\boxed{3}$ (3) で内積になることは確認済み). $W = \{k(x+2) \,|\, k \in \mathbb{R}\}$ とおくとき, W の直交補空間 $W^\perp$ を求めよ.

(2) 小問 (1) で求めた $W^\perp$ への直交射影 $p_{W^\perp} : V \to V$ を求めよ. つまり, $f(x) = ax^2 + bx + c \in V$ に対し, $p_{W^\perp}(f(x)) = g(x)$ となる $g(x)$ を a, b, c を用いて表せ.